

Flujo en medios porosos no saturados a través del método de los elementos finitos

A. Facundo Correas, Jorge Baron

Doctorado en Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo

E-mail: facundocorreas@hotmail.com, facundocorreas2@gmail.com, jbaron@fing.uncu.edu.ar

RESUMEN: Este trabajo explica el procedimiento realizado para modelar el flujo estático no saturado en un corte transversal de suelo a través del método de los elementos finitos. El flujo en suelos no saturados está gobernado por la ley de Darcy, pero en este caso la conductividad hidráulica en el medio no es constante sino que varía en función de la altura de presión de agua, que depende a su vez del contenido volumétrico de agua en el suelo. En este modelo se intenta representar un plano o corte transversal (2D) del terreno, se utilizó una malla no estructurada creada con el software libre de generación de mallas Gmsh v2.5 con el fin de realizar un modelo de prueba, los datos del suelo y de ingreso se tomaron como genéricos y se buscó representar un caso sencillo de ingreso-egreso por la pared superior, con condiciones de frontera de nivel constante en el nivel inferior del modelo y flujo libre en los laterales.

Para la formulación matricial de las ecuaciones necesarias se utilizó el método de Galerkin, se programó el modelo a través del programa libre Octave (similar al Matlab) de cálculo matemático. La malla no estructurada cuenta con elementos triangulares y se tomó como simplificación que la conductividad hidráulica no saturada es constante en el triángulo elemental e igual al promedio de cada nodo elemental. Se tomó como función de variación de conductividad a la expresión desarrollada por Van Genuchten. Es posible de modelar flujos con distintos tipos de terrenos y diferente conductividad ($K(h)_x \neq K(h)_z$), es decir, condiciones de anisotropía. Los resultados obtenidos son alentadores y son los matemáticamente esperados para este tipo de problemas.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo analizaremos la ecuación de flujo no saturado en medios porosos y su resolución a través del método de elementos finitos. Para ello analizamos las ecuaciones de flujo existentes y los distintos modelos de resolución.

Encontramos en la literatura las ecuaciones de flujo subterráneo de medios porosos no saturados que como es de esperar siguen la ley de Darcy para medios porosos saturados (Custodio & Llamas 1976), pero en este caso la conductividad hidráulica en el medio no es constante sino que varía en función de la altura de presión de agua en el mismo, que a su vez depende del contenido volumétrico de agua del suelo, o sea la proporción de cantidad de agua del suelo con respecto a la de saturación (Ventura 2003; Šimůnek et al. 1999).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[K_x(h) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_y(h) \frac{\partial h}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K_z(h) \left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right) \right] = 0 \quad (1)$$

Donde; $K_x(h)$, $K_y(h)$ y $K_z(h)$ son las componentes de la conductividad hidráulica, que son funciones de la altura de presión h , en las tres direcciones del espacio donde z se asume como la coordenada vertical. La variable de estado desconocida es la altura de presión h .

Por otro lado la ecuación del flujo transitorio de un medio no saturado, ecuación de Richards, (Šimůnek et al. 1999; Ventura 2003) puede expresarse como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[K_x(h) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_y(h) \frac{\partial h}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K_z(h) \left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right) \right] = C(h) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2)$$

En este caso, $C(h)$ es la capacidad de humedecimiento específico.

$$C(h) = \frac{\partial \theta}{\partial h} \quad (3)$$

Donde θ es el contenido volumétrico de agua. Incógnita o variable de estado para los dos casos está representada por la altura de presión h . Que en este caso debido a la complejidad de la ecuación diferencial que describe el flujo y a la variación de los coeficientes K en función de h es necesario buscar la solución analítica de esta ecuación de manera aproximada, en este caso, a través del método de las diferencias finitas.

Método de los residuos ponderados de elementos finitos

En este método se pretende llegar a una formulación integral de la ecuación gobernante del flujo o transporte del agua subterránea. Esta formulación integral lleva a un sistema de ecuaciones algebraicas que pueden resolverse para valores de la variable de campo en cada nodo de la red o malla (discretización en elementos de menor tamaño de la geometría a modelar).

El método de los residuos ponderados es el método más general para resolver problemas de flujo en aguas subterráneas como también el transporte de solutos (Seegerlind 1976; Lapidus & Pinder 1982). En este método se define una solución aproximada a la condición inicial o de borde. Cuando se reemplaza esta solución aproximada en la ecuación diferencial gobernante se genera un error o residuo en cada punto del dominio del problema. Entonces se fuerza que el peso ponderado o promedio de estos residuos en los nodos de la malla de elementos finitos sea igual a cero.

Consideremos la ecuación diferencial de la forma:

$$L[h(x, y, z)] - F(x, y, z) = 0 \quad (4)$$

Donde L es un operador diferencial, h es la variable de campo, y F es una función desconocida. Definimos una solución aproximada por una malla de elementos finitos a la ecuación de la forma:

$$\hat{h}(x, y, z) = \sum_{i=1}^m N_i(x, y, z) h_i \quad (5)$$

Siendo N_i las funciones de interpolación, h_i son los valores (desconocidos) de la variable de campo en los nodos y m es el número de nodos en la malla. Cuando sustituimos la expresión aproximada en la ecuación (4) la ecuación diferencial ya no es satisfecha exactamente, es decir:

$$L[\hat{h}(x, y, z)] - F(x, y, z) = R(x, y, z) \neq 0 \quad (6)$$

Donde R es el residuo o error debido a la aproximación de la solución. El residuo varía de punto a punto en el dominio del problema. En este método se fuerza a que el promedio ponderado de los residuos en los nodos sea igual a cero:

$$\int_{\Omega} W(x, y, z) \cdot R(x, y, z) d\Omega = 0 \quad (7)$$

En este caso $W(x, y, z)$ es una función de peso y Ω representa el dominio del problema. Sustituyendo la ecuación (6) en (7) tendremos:

$$\iiint_{\Omega} W(x, y, z) [L[\hat{h}(x, y, z)] - D(x, y, z)] d\Omega = 0 \quad (8)$$

Para evaluar la ecuación (8) debemos especificar la forma matemática de la solución \hat{h} y la función de peso W . En el método de elementos finitos, \hat{h} es definida de a trozos a lo largo del dominio del problema. El valor de \hat{h} , en cualquier elemento e , $\hat{h}^{(e)}$, es dado por:

$$\hat{h}^{(e)}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i^{(e)} \cdot h_i \quad (9)$$

Donde $N_i^{(e)}$ son las funciones de interpolación del elemento (una función por nodo) y n es el número de nodos en el elemento. Las funciones de interpolación pueden ser varias en función del tipo y dimensión del elemento. Un método ampliamente utilizado para evaluar las funciones de peso y de interpolación es el método de Galerkin.

Método de Galerkin.

En el método de Galerkin las funciones en los nodos para la función de peso es igual a las funciones de interpolación usadas para aproximar la solución \hat{h} .

Luego de especificar la forma aproximada de la solución y la función de peso, podemos evaluar la integral de la ecuación (8) para obtener un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$[K] \cdot \{h\} = \{D\} \quad (10)$$

APLICACIÓN A FLUJO ESTÁTICO DE MEDIO NO SATURADO

La ecuación de flujo en un medio poroso no saturado en 2 dimensiones, (Lapidus & Pinder 1982; Šimůnek et al. 1999; Feddes et al. 2004) donde z es la dimensión vertical puede expresarse como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[K_x(h) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K_z(h) \left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right) \right] = 0 \quad (11)$$

Asumimos una expresión aproximada para h , en este caso \hat{h} , de la forma:

$$\hat{h}^{(e)} = \sum_{i=1}^n N_i^{(e)} \cdot h_i \quad (12)$$

Cuando aproximamos la solución sustituyendo la ecuación (11) no es satisfecha exactamente y un error o residuo aparece en cada nodo del dominio. Como sabemos por la ponderación o promedios de residuos, ecuación (7).

En el método de Galerkin escogemos que las funciones de peso sean iguales a las funciones de interpolación del elemento, o sea $W_i^{(e)} = N_i^{(e)}$. Si además asumimos que las funciones de conductividad no saturada son constantes en el elemento, pero pueden variar desde un elemento al otro. La ecuación (11) queda como:

$$R_i^{(e)} = - \int_{\Omega^{(e)}} W_i^{(e)}(x, y, z) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[K_x(h) \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K_z(h) \left(\frac{\partial \hat{h}}{\partial z} + 1 \right) \right] \right] d\Omega^{(e)} \quad (13)$$

$$R_i^{(e)} = - \int_{\Omega^{(e)}} N_i^{(e)} \left[K_x^{(e)}(h) \frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial x^2} + K_z^{(e)}(h) \frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial z^2} + \frac{\partial K_z^{(e)}}{\partial z}(h) \right] d\Omega^{(e)} \quad (14)$$

Si aplicamos a la ecuación (14) el Teorema de Stokes para reducir el orden de la ecuación diferencial de modo que la podemos expresar como:

$$R_i^{(e)} = - \int_{\Omega^{(e)}} N_i^{(e)} \left[K_x^{(e)}(h) \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} + K_z^{(e)}(h) \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial z} \frac{\partial \hat{h}}{\partial z} + \frac{\partial K_z^{(e)}}{\partial z}(h) \right] d\Omega^{(e)} + \oint_{\Gamma} N^T (\vec{n} \cdot \mathbf{q}_{cte}) d\Gamma \quad (15)$$

$$\sum_e K^{(e)}(h) \int_{\Omega^{(e)}} N_i^{(e)T} \left[K_x^{(e)} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + K_z^{(e)} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \frac{\partial K_z^{(e)}}{\partial z}(h) \right] H d\Omega^{(e)} = \sum_e \oint_{\Gamma} N^T (\vec{n} \cdot \mathbf{q}_{cte}) d\Gamma \quad (16)$$

Esta ecuación representa la formulación integral para flujo estático en medio no saturado. Cuando el medio está relativamente seco el término $\frac{\partial K_z^{(e)}}{\partial z}(h)$ será pequeño, en este caso las fuerzas capilares $\left(\frac{\partial \hat{h}}{\partial x}\right)$ serán mucho mayores que las gravitacionales $\left(\frac{\partial K_z^{(e)}}{\partial z}\right)$. En este caso puede despreciarse este último término. Para flujo en tres dimensiones debe agregarse al componente en la dirección y . Para el caso de flujo horizontal se despreciarían los últimos dos términos de la ecuación (16) agregando el término en y .

Expresión matricial de la ecuación de flujo

$$\begin{Bmatrix} R_1^{(e)} \\ \vdots \\ R_n^{(e)} \end{Bmatrix}_{n \times 1} = [K^{(e)}(h)]_{n \times n} \begin{Bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{Bmatrix}_{n \times 1} \quad (17)$$

Donde $[K^{(e)}(h)]$ es la forma de la matriz de conductividad no saturada (Istok 1989), dada por:

$$[K^{(e)}(h)]_{n \times n} = - \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial z} \end{bmatrix}_{n \times 3} \begin{bmatrix} K_x^{(e)}(h) & 0 & 0 \\ 0 & K_y^{(e)}(h) & 0 \\ 0 & 0 & K_z^{(e)}(h) \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial z} \end{bmatrix}_{3 \times n} d\Omega^e \quad (18)$$

Combinando la matriz de conductividad elemental para todos los elementos de la malla podremos obtener la forma no saturada de la matriz global de conductividad.

$$[K(h)]_{global} = \sum_{e=1}^m [K^{(e)}(h)]_{expandida} \quad (19)$$

Donde existen m elementos en la malla. La dependencia de la matriz de conductividad global con la altura de presión h es enfatizada porque en el proceso de solución abarcaremos un sistema de ecuaciones no lineales de la forma:

$$[K(h)]_{global} \begin{Bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_p \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Donde $h_1 \dots h_p$ representan los valores de altura de presión en cada nodo. En el caso de flujo no saturado, $\{D\}$ contendrá una tasa específica de flujo subterráneo en los bordes y alguna fuente o sumidero. Si deseamos incluir fuerzas gravitacionales, tendremos contribuciones adicionales a $\{D\}$ en la ecuación (21) que resultarán de la integración de $\frac{\partial K_z^{(e)}}{\partial z}(h)$.

Funciones de interpolación para elementos triangulares.

El elemento plano más utilizado es el triángulo, Figura 1. Las funciones de interpolación para este elemento están desarrollada, entre otros autores, por Segerlind (Segerlind 1976).

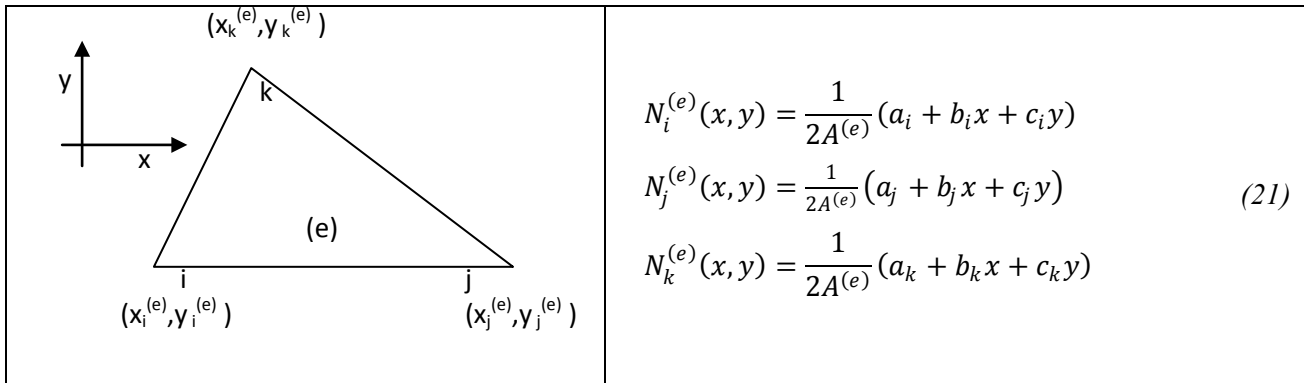


Figura 1.- Funciones de interpolación para el elemento triangular.

$$\begin{aligned}
 a_i &= x_j^{(e)} y_k^{(e)} - x_k^{(e)} y_j^{(e)} & a_j &= x_k^{(e)} y_i^{(e)} - x_i^{(e)} y_k^{(e)} & a_k &= x_i^{(e)} y_j^{(e)} - x_j^{(e)} y_i^{(e)} \\
 b_i &= y_j^{(e)} - y_k^{(e)} & b_j &= y_k^{(e)} - y_i^{(e)} & b_k &= y_i^{(e)} - y_j^{(e)} \\
 c_i &= x_k^{(e)} - x_j^{(e)} & c_i &= x_i^{(e)} - x_k^{(e)} & c_k &= x_j^{(e)} - x_i^{(e)}
 \end{aligned} \quad (22)$$

Y el área del elemento se calcula como:

$$A^{(e)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i^{(e)} & y_i^{(e)} \\ 1 & x_j^{(e)} & y_j^{(e)} \\ 1 & x_k^{(e)} & y_k^{(e)} \end{vmatrix} = \frac{c_k b_j - c_j b_k}{2} \quad (23)$$

Las matrices elementales para el triángulo lineal pueden ser fácilmente calculadas usando la fórmula de integración.

$$\int_{\Omega^{(e)}} (N_i^{(e)})^a (N_j^{(e)})^b (N_k^{(e)})^c d\Omega^{(e)} = \frac{a! b! c!}{(a + b + c + 2)!} 2A^{(e)} \quad (24)$$

En esta ecuación a, b y c son los exponentes de las funciones de interpolación. De este modo podemos expresar las matrices (18) utilizando las derivadas de las funciones de forma (21). De esta manera para un problema plano de elementos triangulares la matriz elemental de conductividad no saturada puede expresarse como:

$$[K^{(e)}(h)]_{3 \times 3} = \frac{K_x^{(e)}(h)}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j^2 & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k^2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} + \frac{K_y^{(e)}(h)}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j^2 & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k^2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (25)$$

O expresado en forma matricial:

$$[K^{(e)}(h)]_{3 \times 3} = \frac{A^{(e)} K(h)}{2} [B]^T * [K_a] * [B] \quad (26)$$

Donde:

$$[B]_{2 \times 3} = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}; \quad (27)$$

$$[K_a]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} K_x^{(e)} & 0 \\ 0 & K_y^{(e)} \end{bmatrix}$$

Además, $K(h)$ = conductividad hidráulica variable elemento a elemento, pero constante dentro del elemento para calcular el valor de K realizo la siguiente aproximación:

$$K(h) = \frac{K(h)_i + K(h)_j + K(h)_k}{3} \quad (28)$$

Como siempre los subíndices (i, j, k) indican el valor de K en los respectivos nodos del elemento triangular considerado.

Consideraciones de la variación de conductividad hidráulica.

Para tener en cuenta el efecto de la variación de la conductividad en función de la carga h del suelo (o altura de presión, también encontrada como succión en alguna bibliografía) se utilizó el modelo desarrollado por van Genuchten (van Genuchten 1980), basado en un modelo de distribución de tamaño de poros desarrollado por Mualem (Mualem 1976) y para obtener la conductividad no saturada en función de los parámetros de retención del suelo.

Las expresiones de esta relación se expresan a continuación:

$$\theta(h) = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{[1 + |\alpha h|^n]^m} \quad h < 0 \quad (29)$$

$$K(h) = K_s \cdot S_e^l \left[1 - \left(1 - S_e^{1/m} \right)^m \right]^2 \quad (30)$$

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (31)$$

$$m = 1 - 1/n, \quad n > 1 \quad (32)$$

Las ecuaciones (29, 30, 31 y 32) contienen cinco parámetros independientes, θ_r , θ_s , α , n y K_s . El parámetro de conectividad de poros l se toma como 0,5, un valor medio para muchos suelos. Los valores de θ corresponden a el valor mínimo posible o contenido de agua residual (θ_r) y el máximo o contenido de agua de saturación (θ_s). En cuanto a α es la inversa del valor de entrada de aire (o presión de burbuja), n es el índice de distribución de tamaño de poros.

DESARROLLO DEL MODELO PARA UN CASO PARTICULAR

Para el modelo desarrollado se decidió crear una sección plana y se simplificó el modelo quitando la influencia de las fuerzas gravitatorias. Considerando estas simplificaciones la ecuación programada para los elementos finitos tiene la siguiente forma:

$$\sum_e K^{(e)}(h) H_e = \sum_{e\text{-borde}} d_e \quad (33)$$

$$H_{\text{completo}} = [K(h)]_{\text{global}}^{-1} \cdot \{d\}$$

La geometría generada se muestra a continuación y representa un terreno que cuenta en la parte superior con un flujo de caudal. El alto y ancho máximo de la malla generada en el soft Gmsh es de diez metros, la misma cuenta en la parte superior con dos bordes inclinados y una parte superior plana que es el borde de flujo (de 2m de ancho). La malla (Figura 2) cuenta con 948 nodos y 1787 elementos tiene una mayor discretización en la parte superior para ver mejor la influencia del flujo. Los bordes laterales (tanto la pared izquierda como la derecha y los bordes inclinados superiores) se establecieron con un valor de presión variable desde un

mínimo en la superficie hasta la saturación en el final (en función de y). El borde inferior se lo consideró como el nivel de la napa freática y su valor de presión es el de saturación ($h = 0$ en este caso).

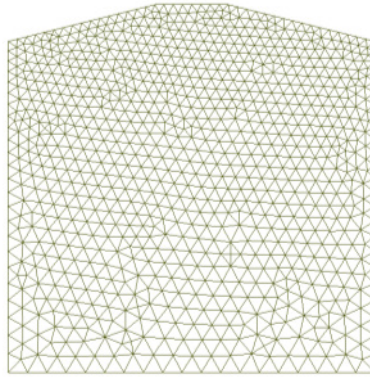


Figura 2. Malla de elementos finitos generada en Gmsh.

Condiciones de borde.

Condición de flujo específico o contorno de Neumann.

Para el borde plano superior del modelo se establece una condición de flujo constante, en el caso modelado es una salida de caudal, lo que representa una extracción ya sea por las raíces de un gran árbol o un dren colocado en esa zona. Las ecuaciones que determinan esta condición son:

$$\oint_{\Gamma_e} d \, d\Gamma_e = \sum_{e-\text{borde}} d_e \quad (34)$$

Donde;

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_e} d \, d\Gamma_e &= \oint_{\Gamma_e} N^T (\vec{n} \cdot q_{cte}) d\Gamma_e = q_{cte} \oint_{\Gamma_e} N^T d\Gamma_e = d_e \\ d_e &= q_{cte} \cdot \frac{L}{2} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (35)$$

En este caso q_{cte} es el flujo constante que sale del modelo, L representa la longitud del borde del elemento superior, y el vector i, j, k tiene valores 1 o 0 dependiendo si el nodo involucrado de este elemento de borde se encuentra o no en el borde.

Condiciones de contorno de altura de presión específica o de Dirichlet.

En este caso la condición de borde responde a valores de la función conocidos que responden a la forma:

$$h(x, z) = H(x, z) \quad \text{para } (x, z) \in \Gamma_D \quad (36)$$

Se estableció un valor de $H = 0$ (altura de saturación) para el borde inferior o $z = 0$, simulando el nivel de la napa freática. En cuanto a los otros bordes, los laterales y los inclinados superiores, se estableció una condición de variación lineal en función de la coordenada z desde el valor mínimo de presión (o máximo de succión) hasta cero. Esta condición responde a la condición inicial generada.

Parámetros de cálculo.

El modelo representa un suelo compuesto por arena con algunos finos. Los datos de los parámetros se extrajeron de Carsel y Parrish y otros (Carsel & Parrish 1988; Moral & Giráldez 1995).

Tabla 1.- Datos para de suelo no saturado para el modelo.

| h [m] | θ_r [] | θ_s [] | α [1/m] | n | m | $\theta(h)$ | $Se(\theta)$ | K_s [cm/día] | K_s [m/día] | $K(h)$ |
|---------|----------------|----------------|----------------|------|------|-------------|--------------|----------------|---------------|--------|
| -0,2 | 0,06 | 0,43 | 7,5 | 1,89 | 1,53 | 0,12 | 0,17 | 106,1 | 1,061 | 0,087 |

Con estos datos podemos graficar como variaría aproximadamente, en función de la altura de presión, la Humedad (Figura 3) y la conductividad Hidráulica (Figura 4).

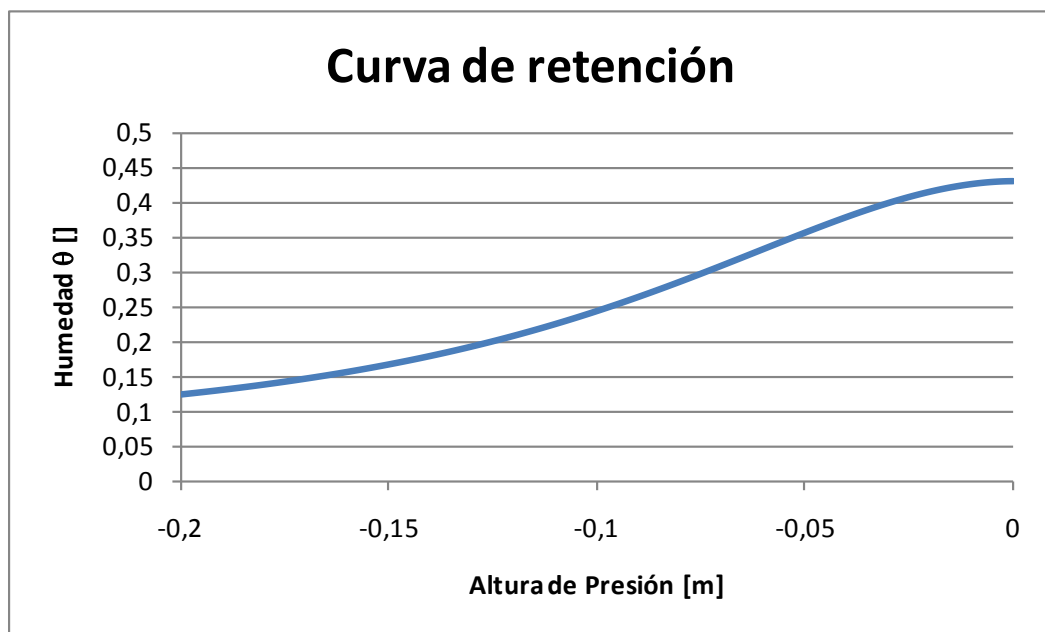


Figura 3. Curva de variación de contenido de Humedad en función de la altura de presión.

Conductividad Hidráulica

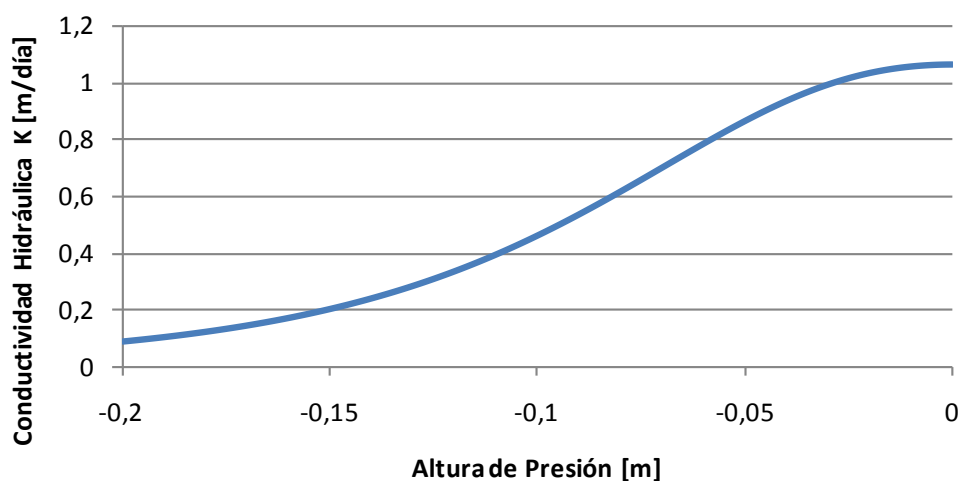


Figura 4. Curva de variación de Conductividad Hidráulica en función de la altura de presión.

Programación

La programación se llevó a cabo en el soft libre de programación Octave (similar a Matlab) con un complemento de visualización para Windows (GUI Octave). Para la programación se realizaron dos programas enlazados, `nosaturado.m` que es el programa general y `propelementales.m`, que lee y carga los datos de los elementos produciendo las matrices elementales.

En primer lugar `nosaturado.m` carga o lee el archivo de salida de Gmsh con los datos de los nodos, los elementos y su conectividad. Una vez leída la malla se establecen los nodos que forman el contorno o borde de la misma designando un nombre a cada uno.

Como los coeficientes de la ecuación son variables y dependen de la función de estado H es necesario establecer condiciones iniciales para obtener un primer valor de los mismos y luego realizar la integración en función de estos.

Se establece una variación lineal dando un valor en la parte superior de 2 metros de succión y varía hasta cero en la parte inferior. Luego se calcula las propiedades y parámetros en cada elemento en el programa `propelementales.m`.

Este programa carga todos los datos de los elementos además de las condiciones iniciales de H para el elemento. Se establecen los parámetros y las condiciones de anisotropía si se requiere. Calcula las propiedades de cada nodo en el elementos siguiendo las ecuaciones de Van Genuchten, una vez calculado el valor de k_i , k_j , k_k , se promedian para establecer el valor de $k(h)$ para cada elemento. Finalmente calcula la matriz k^e y d^e . Que representan tanto la matriz de conductividad elemental y el lado derecho o conocido de cada elemento.

Además se establece en este programa la condición de Neumann e identificando cada nodo del borde se calcula la longitud de la línea o borde de flujo y con la constante de salida de caudal q_{cte} se establece el lado derecho de la ecuación de flujo.

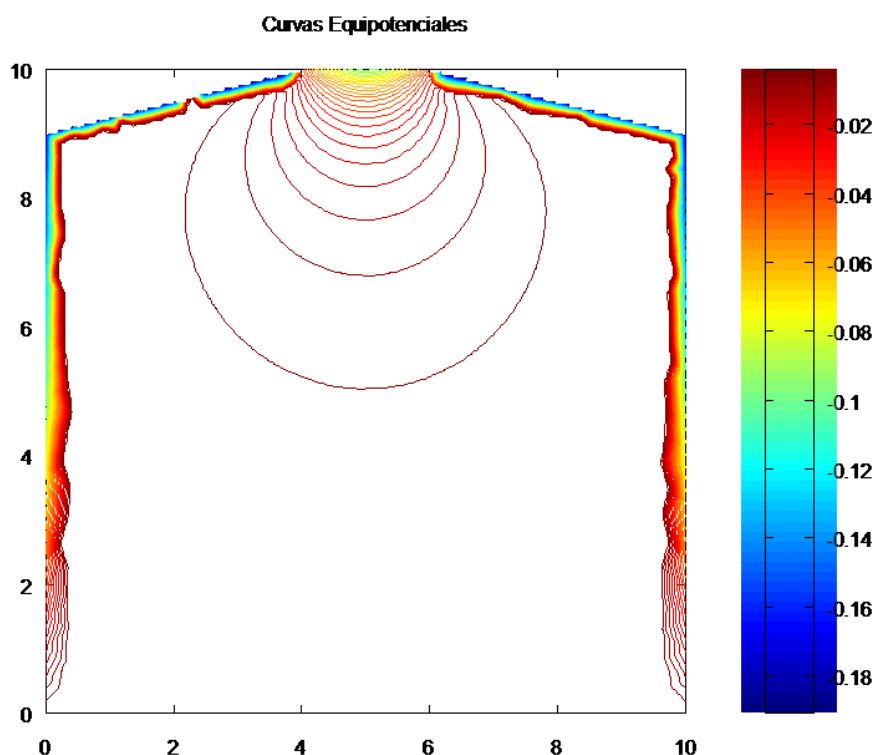
Volviendo al programa general se ensambla la matriz K global y d . En este momento el programa establece la variación de los bordes y las condiciones de H constante. Para ello se evalúa la solución, se modifica el valor de d y luego se elimina la fila y columna conocida (en K y d) se cargan los valores conocidos y se completa el vector solución final que en este caso lleva el nombre Hcompleto.

Como en el principio se cargaron valores arbitrarios para la distribución inicial de presiones se realiza un *loop* con el comando *for* de manera que los valores de Hcompleto sean los nuevos iniciales. Se itera varias veces hasta comprobar que el error en los valores de los nodos entre una iteración y otra es pequeño.

Por último se realizan dos gráficos uno mostrando los valores de H en la malla y otro mostrando curvas de igual presión.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

A continuación se muestran los resultados obtenidos:



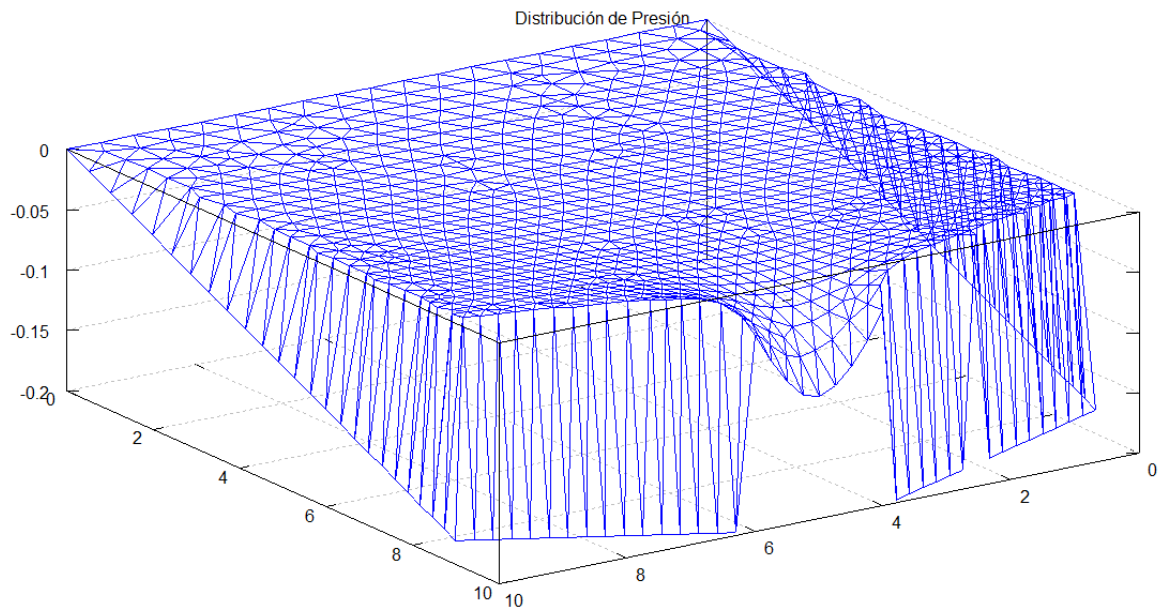
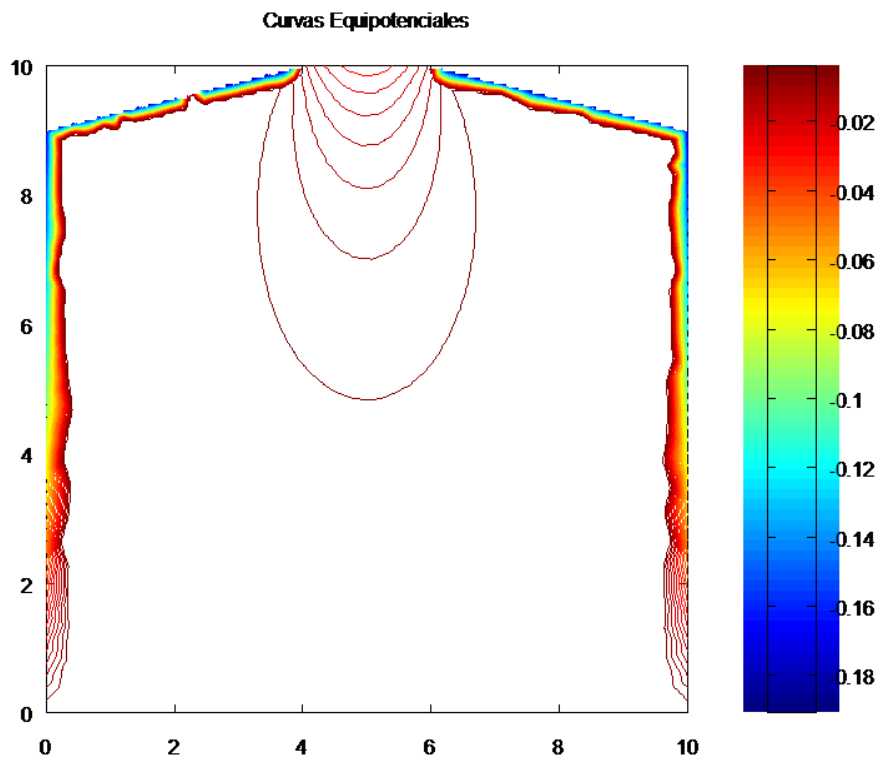


Figura 5. Resultados del caso isotrópico ($k_x=k_y$).



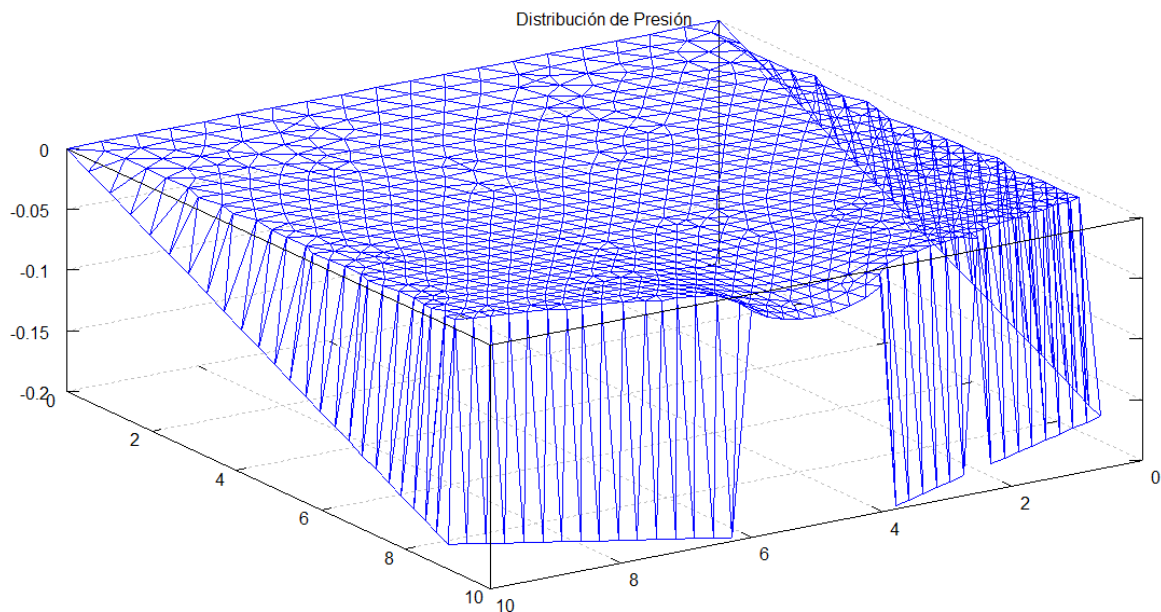


Figura 6. Resultados del caso anisotrópico ($k_x \neq k_y$).

El modelo responde de manera esperada generando un cono de succión en el lugar de la salida de caudal, como se ve en los diagramas mostrados en la Figuras 5 y 6.

Se verifican las condiciones de borde establecidas como también la forma del cono de succión ante las dos alternativas de suelo ya sea con igual factor k_x y k_y (Figura 5) o con distintos valores de ellos (Figura 6, aunque sólo se modeló un tipo de suelo, es decir, los demás parámetros permanecieron constantes).

Se verifica que el modelo es muy sensible a los valores de q_{cte} llevando a errores numéricos para valores altos del mismo. Esto quizá se puede limitar estableciendo los límites físicos para h , y $k(h)$ los cuales no pueden ser demasiado bajos debido a que no circula ningún caudal para valores de contenido de agua menores al crítico (θ_r). Y limitando, además, los valores de k entre 0 y k_s . Pero en este caso el modelo busca representar las ecuaciones matemáticas, por lo que no se establecieron tales limitantes.

Existen muchas ramas para seguir trabajando en el modelo y mejorar su representación de la realidad física, aunque sirvió de iniciación en el modelado de la zona no saturada con elementos finitos. Algunos de los aspectos que pueden mejorarse en el programa serían: mejorar la eficiencia en el cálculo, limitar las magnitudes físicas, contrastando el modelo con resultados experimentales, o con parámetros estudiados en terrenos nuevos. Por otro lado todavía es posible aumentar la capacidad de resolución del programa, agregando complejidad a la ecuación, es decir, realizar un modelo con la influencia de las fuerzas gravitatorias, aumentar una dimensión al programa y realizar un modelo tridimensional, como también, agregando un término de difusión, es posible seguir el flujo y el comportamiento de alguna sustancia contaminante.

Por último, es posible y es objetivo de la tesis de doctorado, agregar al programa aspectos innovadores en el mismo, como puede ser mejorar el modelo de variación de conductividad para adaptarlo a un terreno local, o modelar la influencia de las variaciones en la napa freática en la zona no saturada.

REFERENCIAS

- Carsel, R.F. & Parrish, R.S., 1988. Developing joint probability distributions of soil water retention characteristics. *Water Resources Research*, 24(5), p.755.
- Custodio, E. & Llamas, M.R., 1976. *Hidrología subterránea*, Barcelona: Omega.
- Feddes, R.A., Rooij, G.H. de & Dam, J.C. van, 2004. *Unsaturated-zone modeling progress challenges and applications*, Dordrecht; Boston: Kluwer Academic.
- van Genuchten, M.T., 1980. A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils1. *Soil Science Society of America Journal*, 44(5), p.892.
- Istok, J.D., 1989. *Groundwater modeling by the finite element method*, Washington, DC: American Geophysical Union.
- Lapidus, L. & Pinder, G.F., 1982. *Numerical solution of partial differential equations in science and engineering*, New York: Wiley.
- Moral, F.J. & Giráldez, J.V., 1995. Influencia de la variabilidad del suelo en la hidrología superficial de una cuenca. *Ingeniería del agua*, 1995, vol. 2, núm. 1.
- Mualem, Y., 1976. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resources Research*, 12(3), p.513.
- Seeger, L.J., 1976. *Applied finite element analysis*, New York: Wiley.
- Šimůnek, J., Šejna, M. & van Genuchten, M.T., 1999. *The HYDRUS-2D Software Package for simulating the Two-Dimensional Movement of Water, Heat, and Multiple Solutes in Variably-Saturated Media*.
- Ventura, A.A., 2003. *HYDROFEM: Un modelo tridimensional para la simulación del flujo de agua en medios porosos de saturación variable*.