Análisis Unidimensional de ESCURRI-MIENTO EN CANALES

Alfonso Pujol
Angel Menéndez

serie ciencias y técnicas hídricas

EUDEBA

ANALISIS UNIDIMENSIONAL DE ESCURRIMIENTO EN CANALES

11-11-2011
Buenos Aires

ANALISIS UNIDIMENSIONAL DE ESCURRIMIENTO EN CANALES

Alfonso Pujol
Angel N. Menéndez

Editorial Universitaria de Buenos Aires

EUDEBA S.E.M
Fundada por la Universidad de Buenos Aires

© 1987

EDITORIAL UNIVERSITARIA DE BUENOS AIRES
Sociedad de Economía Mixta
Rivadavia 1571/73
Hecho el depósito que marca la ley 11.723
ISBN: 950-23-0324-5
IMPRESO EN LA ARGENTINA

RESUMEN

El estudio de los problemas de escurrimiento en canales se realiza, generalmente, en base a un análisis unidimensional. Esto implica la adopción de un modelo teórico del escurrimiento cuyas hipótesis fundacionales limitan la validez de los resultados obtenidos. El conocimiento de estos límites es, en consecuencia, esencial.

En este trabajo se describen tres modelos teóricos unidimensionales del escurrimiento con distintos grados de generalidad: un modelo "general" que, aunque globalmente es impráctico, puede aplicarse parcialmente; el modelo de Saint Venant, actualmente el más utilizado en la práctica, y el modelo de convección-difusión, que se ha aplicado frecuentemente a estudios de traslación de ondas de crecida. La descripción consiste en la exposición detallada y ordenada del cuerpo de hipótesis sobre el cual se asienta cada uno de ellos, y en la obtención de las ecuaciones diferenciales que los expresan matemáticamente a partir de la identificación y cuantificación de los mecanismos físicos considerados.

INTRODUCCION

El presente trabajo considera una parte de la problemática básica del escurrimiento en canales de cauce fijo y está concebido, principalmente, como un complemento de la bibliografía del Ingeniero Hidráulico destinado a introducir rigurosidad en el planteo teórico. Su ejecución ha sido motivada por el convencimiento de que, frente a la complejidad y originalidad de los requerimientos ingenieriles actuales, no sólo se necesitan adquirir nuevos conocimientos, sino también disponer de una base conceptual firme, única manera de tener acceso a tecnologías cada vez más sofisticadas.

El problema del escurrimiento en cauces naturales o en canales artificiales se encara, generalmente, por medio de un análisis unidimensional, en base al cual pueden obtenerse tanto resultados cuantitativos como explicaciones cualitativas del fenómeno, imprescindibles ambos para el conocimiento, aprovechamiento, control y conservación de los recursos hídricos. Es necesario clarificar dos aspectos relativos a un tal análisis: en primer lugar, ¿qué es capaz de proveer?, y en segundo lugar, ¿qué información necesita para lograrlo?.

Respecto de la primera cuestión, debe comprenderse que un análisis unidimensional describe las características medias de la corriente en cada sección transversal, por lo cual solo alcanza a resolver aquellas escalas de movimiento mucho mayores que las dimensiones transversales. Deja excluida, entonces, la posibilidad de determinar el establecimiento de corrientes secundarias, la formación de remolinos, etc. No obstante, resulta suficiente para satisfacer muchos de los requerimientos prácticos: el seguimiento de ondas de crecida, la regulación de cursos de agua por medio de embalses, la determinación del escurrimiento en canales sujetos a régimen de marea, etc.

En cuanto al segundo aspecto, se requiere información sobre la geometría del cauce, las características medias de la corriente (niveles y descargas) utilizadas como condiciones iniciales y de contorno, y los efectos globales de los movimientos en escalas no representadas por el análisis. Los datos sobre la geometría deben proveerse con un grado de resolución acorde con

la escala del movimiento medio. Sin embargo, la obtención de esa información, así como la de niveles y descargas, está generalmente supeditada a factores económicos, en cuyo caso la cuestión se invierte: es la disponibilidad de información la que limita la menor escala de movimiento factible de ser estudiada. Por su parte, la evaluación directa de los efectos de las escalas no resueltas sobre la corriente media es, en la práctica, extremadamente difícil, cuando no imposible. La mayoría de las veces se introducen hipótesis simplificativas, que si bien de hecho reducen aún más la gama de casos incluidos en el análisis, permiten obtener resultados muy útiles a cambio de relativamente poca información.

El análisis unidimensional se lleva a cabo sobre un modelo teórico del escurrimiento. Este queda definido a través del establecimiento de un cuerpo de hipótesis. Lógicamente, cuanto mayor es el número de hipótesis menos generales son las ecuaciones resultantes del análisis. Esta cuestión es tratada en el Capítulo 1, donde se da pie a tres formulaciones de las ecuaciones unidimensionales, decrecientes en grado de generalidad: las Ecuaciones Unidimensionales Generales, las Ecuaciones de Saint Venant, y la Ecuación de Convección-Difusión, cada una de las cuales es tratada en los tres Capítulos subsiguientes.

Si bien el orden natural de exposición sería ir de lo general a lo particular introduciendo sucesivas simplificaciones, se ha estimado conveniente variar esa metodología, en atención a las distintas motivaciones que puedan aconsejar la lectura de este trabajo. Es así que se desarrollan dos tratamientos distintos para obtener, en el Capítulo 2, las Ecuaciones de Saint Venant, y, en el Capítulo 3, las Ecuaciones Unidimensionales Generales (por más que aquellas no sean más que un caso particular de estas últimas). De ese modo, se ha regulado el grado de complejidad formal desde el Capítulo 1 al 3, pudiendo incluso obviar la lectura de este último capítulo quien no desee adentrarse en un tratamiento tan detallado del tema. Finalmente, a modo de apéndice, el Capítulo 4 introduce la Ecuación de Convección-Difusión.

CAPITULO 1

MODELO TEORICO DEL ESCURRIMIENTO

Establecer un modelo teórico del escurrimiento significa esquematizar al flujo y a sus contornos, y desechar los efectos dinámicos menos importantes, una vez identificados los esenciales. Esto se concreta en un cuerpo de hipótesis, tanto mayor cuanto más restringido es el modelo.

En lo que sigue se formulan tres modelos teóricos del escurrimiento, decrecientes en grado de generalidad, y denominados de acuerdo a las ecuaciones a que dan lugar: Modelo Unidimensional General, de Saint Venant, y Difusivo, respectivamente. Cada uno surge del anterior mediante un simple agregado de hipótesis.

Quizás en un primer nivel, y algo distanciadas de las restantes, se encuentran las hipótesis básicas de la Hidrodinámica Clásica, que consisten en considerar el medio como continuo, incompresible, homogéneo y newtoniano [1,2]. Esto introduce una primera restricción de tipo práctico, pues deben excluirse del análisis los casos en los cuales la incorporación de aire o la presencia de sedimentos en la masa líquida sean significativas (fenómenos a dos fases).

El resto de las hipótesis se presenta y explica a continuación.

— Modelo Unidimensional General:

i) El único campo de fuerzas actuante es el de la gravedad, que se supone uniforme. En particular, no se consideran las contribuciones de las fuerzas de inercia provocadas por la rotación de la Tierra.

ii) Es un fenómeno a superficie libre. Es decir, se consideran despreciables los efectos de resistencia del aire. En consecuencia, sobre el contorno de separación entre el fluído y la atmósfera solo se ejerce, en esencia, una presión constante, que puede tomarse como nula [1]. (En rigor, también debe explicitarse que se desprecian los efectos de la tensión superficial, lo cual es inobjetable dado las dimensiones de los escurrimientos habitualmente estudiados).

iii) La forma del canal es invariable. Esto significa que el cauce no se deforma con el tiempo, lo cual se cumple en canales revestidos y en tramos de cursos de agua sobre cauces rocosos. También se verifica en canales con fondo de material suelto o friable, siempre y cuando los estudios se extiendan sobre intervalos de tiempo menores que aquellos dentro de los cuales de producen cambios significativos de la forma del cauce.

iv) La alineación y la forma del cauce son arbitrarias pero sin variaciones bruscas. De ese modo las variaciones significativas de alineación y forma pueden ser resueltas por la escala de análisis unidimensional. Entonces es posible "suavizar" la superficie del cauce, y representarla por una función matemática continuamente derivable [3] (e independiente del tiempo, de acuerdo a iii)). Quedan excluidas del análisis las situaciones en las cuales existen contracciones y/o expansiones bruscas de la sección transversal, así como codos en la alineación.

v) Las componentes de la velocidad según las secciones transversales a la dirección del escurrimiento son pequeñas frente a las componentes longitudinales. Es decir, el escurrimiento debe ser esencialmente unidireccional, por lo cual puede ser pensado como un filamento de corriente cuyo grosor varía en forma suave. Este requerimiento es fundamental para que el análisis unidimensional sea significativo.

vi) La turbulencia está totalmente desarrollada. De este modo se especifica que no existen zonas de transición entre los regímenes laminar y turbulento, ni capas límites en desarrollo [4]. En la práctica, los escurrimientos se producen generalmente a números de Reynolds lo suficientemente altos como para que esta hipótesis se verifique con buena aproximación.

— Modelo de Saint Venant:

vii) Son despreciables las componentes de la aceleración según las secciones transversales. Más precisamente, las componentes transversales de la aceleración son pequeñas frente al módulo de la aceleración de la gravedad, lo cual determina una distribución de presiones esencialmente hidrostática, y una superficie libre aproximadamente nivelada

en cada sección transversal. Estas situaciones se reconocen cinemáticamente como "flujo gradualmente variado", es decir, un flujo cuyas líneas de corriente presentan curvaturas y divergencias débiles (lo cual sólo es compatible con un canal cuasiprismático). En la práctica, ésto excluye del análisis los casos en los cuales se producen transiciones entre los regímenes subcrítico y supercrítico (resalto hidráulico o caída hidráulica), los que presentan meandros de gran curvatura, los que superan el valor límite de número de Froude sobre el cual se produce flujo (supercrítico) pulsante [5], etc.

viii) Los efectos no disipativos de la turbulencia son despreciables. Esto indica que la turbulencia se manifiesta sólo como una resistencia efectiva, lo que en la práctica resulta una buena aproximación.

ix) La distribución de velocidades es uniforme en cada sección transversal. Esta hipótesis constituye una sobresimplificación del perfil de velocidades de "tipo logarítmico", característico de una capa límite turbulenta totalmente desarrollada. En rigor origina una contradicción con la condición de no deslizamiento sobre el cauce, que a su vez produce una inconsistencia del modelo teórico al considerar el balance energético (ver 2.4). No obstante, su utilización en la práctica provee, generalmente, resultados aceptables.

x) La pendiente del fondo es pequeña. Por pendiente pequeña se entiende que el valor en radianes del ángulo de inclinación del fondo respecto de un plano horizontal coincide aproximadamente con el de su seno y su tangente trigonométricas. Si bien esta hipótesis no es esencial, se verifica usualmente en los casos de interés práctico.

— Modelo Difusivo:

xi) Los efectos de las fuerzas de inercia son despreciables. Es decir, el número de Froude del escurrimiento es pequeño frente a la unidad.

xii) El flujo lateral puede ignorarse. En rigor, ésto significa que el aporte lateral sobre distancias del orden de la longitud típica del fenómeno en estudio es pequeño frente a la descarga a lo largo del canal.

xiii) El ancho del canal varía muy lentamente. Más específicamente, la variación relativa del ancho es mucho menor que la variación relativa del aumento del caudal por unidad de longitud.

CAPITULO 2

ECUACIONES DE SAINT VENANT

Existen, históricamente, dos enfoques para formular las ecuaciones diferenciales unidimensionales que representan matemáticamente a un escurrimiento. Uno, que data del siglo XIX y al cual aparecen vinculados los nombres de Belanger, Wauthier, Coriolis, Boussinesq [6] y Saint Venant [6, 7], podría denominarse tratamiento "integral", pues consiste en aplicar los principios de la Mecánica a elementos fluídos de dimensiones transversales finitas. El otro, más moderno, y al cual están asociados nombres como Keulegan [8, 9], Patterson [9], Farrell [10], Strelkoff [11], Yen [12, 13], Wenzel [12], e Iwasa [14], se podría llamar tratamiento "puntual", pues parte de las Ecuaciones de Navier-Stokes (que surgen de la aplicación de los principios de la Mecánica a elementos diferenciales de fluído) y las integra sobre la sección transversal al escurrimiento. En este Capítulo se utiliza el primer enfoque para obtener las Ecuaciones de Saint Venant, dejándose el segundo para el próximo Capítulo, donde se formulan las Ecuaciones Unidimensionales Generales.

En los tres primeros puntos (parágrafos 2.1. - 2.2. - 2.3) se obtienen, respectivamente, las Ecuaciones de Continuidad, Cantidad de Movimiento y Energía. Las semejanzas y diferencias entre estas dos últimas se discuten en el cuarto punto (parágrafo 2.4.). En el quinto (parágrafo 2.5.) se presenta y analiza la manera de parametrizar los efectos resistivos, lo cual conduce a las formas usuales de las Ecuaciones de Saint Venant. Sus principales métodos de resolución se reseñan en el sexto punto (parágrafo 2.6.). Finalmente, en el último punto (parágrafo 2.7.) se señalan algunas extensiones simples del tratamiento, para abarcar casos de importancia práctica en los cuales fallan algunas de las hipótesis del Modelo de Saint Venant.

2.1. *Ecuación de Continuidad*

Sea s la coordenada longitudinal, es decir, tangente al fondo y en el sentido del escurrimiento (ver Figura 2.1.). La Ecuación de Continuidad surge de aplicar el principio de conservación de la masa a un volumen elemental $\delta\forall$ en forma de "rodaja" transversal a s, limitado por dos secciones transversales fijas, separadas por una distancia δs, y una superficie lateral constituida en parte por el cauce y en parte por la superficie libre.

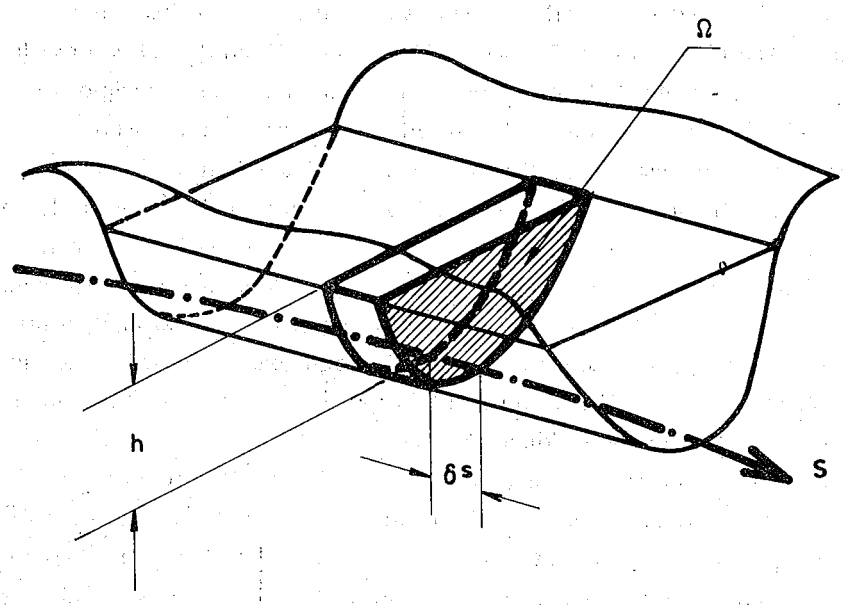


Figura 2.1. Coordenada longitudinal y volumen de análisis

Sea $Q(s, t)$ el gasto líquido (descarga o caudal) en la dirección del escurrimiento que, en el instante t, atraviesa la sección transversal $\Omega(s, t)$ ubicada en s. La pérdida neta de volumen de fluído (proporcional a la masa por ser incompresible) a través de las secciones transversales extremas de $\delta\forall$ en un intervalo de tiempo δt, vale entonces

$$Q(s+\delta s, t)\,\delta t - Q(s, t)\,\delta t = \frac{\partial Q}{\partial s}\,\delta s\,\delta t \qquad (2.1)$$

en donde, en el primer miembro, no se considera la variación del gasto durante el intervalo δt (primer orden en δt), y en el segundo, además, se toma solamente el primer término de un desarrollo en serie de potencias de δs (primer

orden en δs). Con el mismo criterio, en lo que sigue se ignoran términos de orden mayor al primero en δs y δt .

Sea $q\ (s, t)$ la descarga por unidad de longitud a través de la superficie lateral ($q > 0$ si es saliente, como las producidas por filtraciones, vertederos laterales, etc.; $q < 0$ si es entrante, como las debidas a precipitaciones, afluentes, etc.). La pérdida de volumen de fluído en el mismo intervalo δt , vale entonces

$$q\,\delta s\,\delta t \tag{2.2}$$

Ambas pérdidas determinan la disminución del volumen de la "rodaja" de fluído, la cual puede expresarse como

$$[\,\Omega\,(s, t) - \Omega\,(s, t + \delta t)\,]\,\delta s \cong - \frac{\partial \Omega}{\partial t}\,\delta t\,\delta s \tag{2.3}$$

La Ecuación de Continuidad se obtiene igualando la pérdida total de volumen, suma de (2.1) y (2.2), a su disminución expresada en (2.3), dividiendo por $\delta s\,\delta t$, y tomando límite para ambos incrementos tendiendo a cero. Adviértase que, con el paso al límite, se anulan los términos de orden mayor al primero, hasta aquí ignorados, con lo cual la igualdad es estricta. Reordenando la expresión resultante se obtiene

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} + q = 0 \tag{2.4}$$

que es la Ecuación de Continuidad para flujo en canales, escrita en términos del gasto líquido Q y la sección transversal Ω .

Una expresión alternativa a la ecuación (2.4) surge a partir de la introducción del concepto de velocidad media de flujo $U\ (s, t)$ en una sección, definida como

$$U \equiv \frac{Q}{\Omega} \tag{2.5}$$

En términos de esta velocidad media U y de la sección transversal Ω , la ecuación (2.4) puede escribirse como

$$\Omega\,\frac{\partial U}{\partial s} + U\,\frac{\partial \Omega}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} + q = 0 \tag{2.6}$$

Nótese que en la formulación de las ecuaciones (2.4) y (2.6) sólo se han utilizado las hipótesis del Modelo Unidimensional General, por lo cual éstas también son expresiones de la Ecuación de Continuidad Unidimensional General.

La aceptación de una o varias de las hipótesis introducidas por el Modelo de Saint Venant conduce a formas de la Ecuación de Continuidad que, si bien menos generales, resultan más convenientes en la práctica. Cuando es despreciable la componente horizontal de la aceleración transversal puede considerarse nivelada la superficie libre en cada sección transversal, y adquiere relevancia el concepto de profundidad $h(s, t)$, según se ilustra en la Figura 2.2. Es posible, entonces, expresar la variación $\delta\Omega$ de la sección en función de la variación δh de la profundidad. A primer orden en δh, esta relación es

$$\delta\Omega \cong B\,\delta h \tag{2.7}$$

donde $B(s, t)$ es el ancho de la sección en la superficie libre.

La introducción de la ecuación (2.7) en la ecuación (2.4) determina una forma más restringida de la Ecuación de Continuidad, en términos de Q y h, dada por

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + B\frac{\partial h}{\partial t} + q = 0 \tag{2.8}$$

donde, eventualmente, B puede considerarse función de s y h, puesto que la determinan unívocamente. De ese modo, $B(s, h)$ constituye una relación puramente geométrica, en principio evaluable a priori, en la cual la dependencia temporal está implícita a través de $h = h(s, t)$.

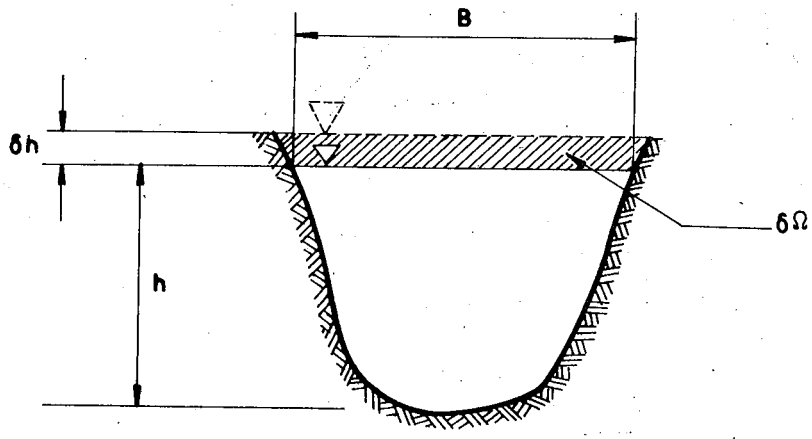


Figura 2.2. Corte transversal al escurrimiento

La modificación análoga de la ecuación (2.6) para la obtención de una expresión en términos de U y h , requiere un tratamiento de Ω similar al dispensado a B anteriormente. Es decir, se considera que $\Omega = \Omega$ (s, h(s, t)). Entonces (explicitando con un subíndice la variable que se mantiene constante durante la derivación)

$$\left.\frac{\partial\Omega}{\partial s}\right]_t = \left.\frac{\partial\Omega}{\partial s}\right]_h + \left.\frac{\partial\Omega}{\partial h}\right]_s \left.\frac{\partial h}{\partial s}\right]_t = \left.\frac{\partial\Omega}{\partial s}\right]_h + B \left.\frac{\partial h}{\partial s}\right]_t \tag{2.9}$$

donde la última igualdad surge de la ecuación (2.7). El primer término del segundo miembro puede considerarse, también, puramente geométrico, con dependencia temporal implícita.

Reemplazando las ecuaciones (2.7) y (2.9) en la ecuación (2.6) se obtiene

$$\Omega \frac{\partial U}{\partial s} + U \left.\frac{\partial\Omega}{\partial s}\right]_h + B\left(U \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial t}\right) + q = 0 \tag{2.10}$$

que es la Ecuación de Continuidad en términos de la velocidad media U y la profundidad h .

Finalmente, pueden obtenerse expresiones de la Ecuación de Continuidad en términos de la altura z de la superficie libre respecto a un nivel de referencia, el cual es un dato de importancia práctica. Si, en adición a una componente horizontal despreciable de la aceleración transversal, se tiene una pendiente del fondo muy pequeña, se cumple la relación

$$h\,(s, t) \cong z\,(s, t) - z_o\,(s) \tag{2.11}$$

donde z_o es la altura de fondo respecto del mismo nivel de referencia (ver Figura 2.3.).

Teniendo en cuenta la ecuación (2.11), la ecuación (2.8) puede escribirse como

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + B \frac{\partial z}{\partial t} + q = 0 \tag{2.12}$$

donde ahora B se puede considerar función de s y de z .

La transformación de la ecuación (2.10) requiere más elaboración. En primer lugar, de la ecuación (2.11) surge

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial s} + I_o \tag{2.13}$$

donde

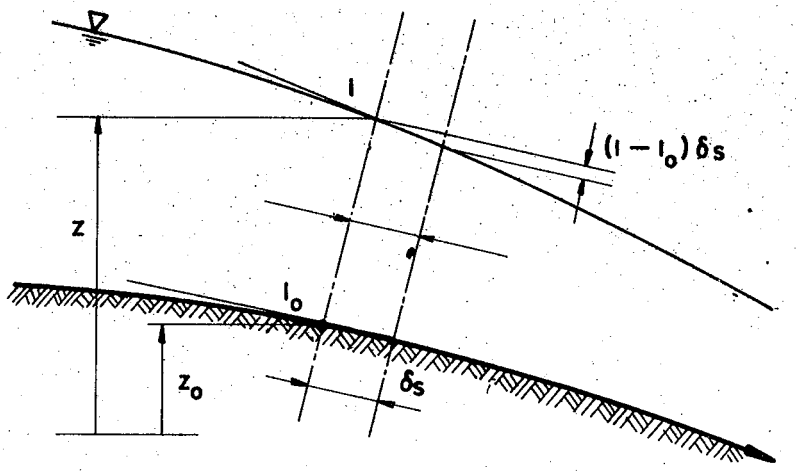


Figura 2.3. Corte longitudinal al escurrimiento

$$I_o(s) \equiv -\frac{dz_o}{ds} \tag{2.14}$$

es la pendiente del fondo (pequeña), elegida como positiva si desciende. En segundo lugar, considerando ahora que $\Omega = \Omega(s, z)$, y que además $z = h + z_o(s)$, se tiene

$$\left.\frac{\partial\Omega}{\partial s}\right]_h = \left.\frac{\partial\Omega}{\partial s}\right]_z + \left.\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right]_s \left.\frac{\partial z}{\partial s}\right]_h = \left.\frac{\partial\Omega}{\partial s}\right]_z - BI_o \tag{2.15}$$

donde, en el segundo término del último miembro, se ha tenido en cuenta que $\delta z)_s = \delta h)_s$, utilizándose entonces la ecuación (2.7). Reemplazando las ecuaciones (2.13) y (2.15) en la ecuación (2.10) se obtiene

$$\Omega\frac{\partial U}{\partial s} + U\left.\frac{\partial\Omega}{\partial s}\right]_z + B\left(U\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial t}\right) + q = 0 \tag{2.16}$$

que es la Ecuación de Continuidad en términos de la velocidad U y la altura z, con las restricciones mencionadas.

Es importante advertir que la semejanza entre las ecuaciones (2.10) y (2.16) es sólo formal, pues quedan claras las diferencias conceptuales entre ambas a través de las ecuaciones (2.13) y (2.15).

2.2. *Ecuación de la Cantidad de Movimiento*

Aplicando el principio de conservación de la cantidad de movimiento al volumen elemental $\delta\forall$ definido en el parágrafo 2.1., se obtiene la ecuación de movimiento correspondiente.

Las fuerzas exteriores que actúan sobre el elemento, con componentes en la dirección del escurrimiento, son: su peso, la fuerza de presión exterior sobre su superficie, y la fuerza resistiva del cauce. Durante un intervalo de tiempo δt, la variación de la cantidad de movimiento contenida en el volumen $\delta\forall$ es igual al impulso resultante de las fuerzas exteriores, menos el flujo neto de cantidad de movimiento a través de su superficie. La evaluación de estos términos en la dirección s, a primer orden en δs y δt, se hace como sigue.

Teniendo en cuenta

$$\delta\forall \cong \Omega\,\delta s \tag{2.17}$$

y que I_o es lo suficientemente pequeña $(I_o \ll 1)$, la componente del peso del elemento en la dirección s vale

$$\gamma\,\Omega\,\delta s\, I_o \tag{2.18}$$

donde γ es el peso específico del fluído.

La presión exterior actúa, en principio, sobre toda la superficie de $\delta\forall$. En realidad, de acuerdo a lo establecido en el Capítulo 1, puede considerarse nula sobre la superficie libre. Además, dado que el canal es cuasi-prismático, se supone despreciable la contribución de la presión del cauce a la fuerza neta según s. Basta, entonces, hacer el cálculo sobre las secciones transversales extremas, para lo cual puede procederse de la forma siguiente.

En primer lugar, si la superficie libre está nivelada en cada sección transversal, se puede definir la pendiente de esa superficie en cada sección como

$$I\,(s,t) \equiv -\frac{\partial z}{\partial s} \tag{2.19}$$

considerada como positiva si desciende. Si $I_o \ll 1$ y el flujo es gradualmente variado, debe ser $I \ll 1$. En términos de estas dos magnitudes, puede calcularse la diferencia de presiones entre dos puntos cualesquiera situados en secciones extremas opuestas, pero alineados paralelamente a s (ver Figura 2.3.). Esta diferencia de presiones es proporcional a la diferencia entre las profundidades de cada uno de esos puntos respecto al nivel de la superficie libre en su sección, que vale

$$(I - I_o)\,\delta s \tag{2.20}$$

constante para una sección, es decir, independiente de las profundidades absolutas de esos puntos. Entonces, la fuerza neta de presión según s es

$$\Omega\,\gamma\,(I - I_o)\,\delta s \tag{2.21}$$

Sumando las contribuciones del peso y las presiones, es decir (2.18) y (2.21) respectivamente, se obtiene

$$\Omega\,\gamma\,I\,\delta s \tag{2.22}$$

independiente de la pendiente I_o del lecho (o, más exactamente, de la pendiente del eje coordenado s), con tal que sea suave $(I_o \ll 1)$.

Si τ_o (s, t) es el valor medio de la tensión de corte sobre el perímetro mojado χ (s, t) en la dirección s , la componente de la fuerza resistiva sobre el fluído en esa dirección (reacción de la anterior) puede expresarse como

$$-\tau_o\,\chi\,\delta s \tag{2.23}$$

La fuerza exterior neta aplicada sobre $\delta\forall$ en el instante t , suma de (2.22) y (2.23), es entonces

$$(\Omega\,\gamma\,I - \tau_o\,\chi)\,\delta s \tag{2.24}$$

que, durante el intervalo δt , produce un impulso

$$(\Omega\,\gamma\,I - \tau_o\,\chi)\,\delta s\,\delta t \tag{2.25}$$

El fluído que escurre a través de las secciones transversales extremas durante un intervalo δt , lleva consigo una cantidad de movimiento según s dada por

$$\rho Q\,(s + \delta s, t)\,\delta t\;U\,(s + \delta s, t) - \rho Q\,(s, t)\,\delta t\;U\,(s, t) \cong$$
$$\cong \rho \frac{\partial}{\partial s}\,(QU)\,\delta s\,\delta t = \rho\left(Q\frac{\partial U}{\partial s} + U\frac{\partial Q}{\partial s}\right)\delta s\,\delta t \tag{2.26}$$

donde ρ es la densidad del fluído.

Por su parte, el fluído que escapa durante el mismo intervalo a través de la superficie lateral, se lleva una cantidad de movimiento según s que vale

$$\rho\,q\,\delta s\,\delta t\,u_L \tag{2.27}$$

donde u_L es la componente en la dirección s de la velocidad del flujo lateral (es importante que la magnitud del flujo lateral sea tal que no desvirtue la posibilidad de aplicar el análisis unidimensional).

La pérdida neta total de cantidad de movimiento a través de la superficie exterior durante el intervalo δt , surge de sumar (2.26) y (2.27), con el resultado

$$\rho\left(Q\frac{\partial U}{\partial s} + U\frac{\partial Q}{\partial s} + q\,u_L\right)\delta s\,\delta t \qquad (2.28)$$

Finalmente, la variación en δt de la cantidad de movimiento según s contenida en $\delta\forall$, puede expresarse como

$$\rho\Omega\,(s, t + \delta t)\,\delta s\,U\,(s, t + \delta t) - \rho\Omega\,(s, t)\,\delta s\,U\,(s, t) \cong$$

$$\cong \rho\frac{\partial}{\partial t}(\Omega U)\,\delta t\,\delta s = \rho\left(\Omega\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)\delta t\,\delta s \qquad (2.29)$$

Igualando la variación (2.29) al impulso (2.25) menos la pérdida neta (2.28) y tras dividir por $\Omega\,\gamma\,\delta s\,\delta t$, tomar el límite para δs y δt tendiendo a cero, y reordenar se obtiene la Ecuación de la Cantidad de Movimiento para canales

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g}\frac{\partial U}{\partial s} - I + \frac{\tau_o}{\gamma R} = -\frac{U}{\Omega g}\left(\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t}\right) - \frac{u_L}{\Omega g}\,q \qquad (2.30)$$

donde $R(s, t) \equiv \dfrac{\Omega}{\chi}$ es el radio hidráulico.

Puede lograrse una expresión más compacta advirtiendo que el factor entre paréntesis es igual a $-q$, de acuerdo a la ecuación (2.4) de Continuidad, con lo que resulta

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g}\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial s} + I_f = \frac{q}{\Omega g}\,(U - u_L) \qquad (2.31)$$

donde, además, se ha utilizado la ecuación (2.19) y se ha definido

$$I_f\,(s, t) \equiv \frac{\tau_o}{\gamma R} \qquad (2.32)$$

denominada "pendiente de fricción".

La ecuación (2.31) es la Ecuación de la Cantidad de Movimiento en términos de la velocidad media U y el nivel z de la superficie libre. La expresión en términos de U y la profundidad h, surge de utilizar la ecuación (2.13), con lo que resulta

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g}\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial s} - I_o + I_f = \frac{q}{\Omega g}\,(U - u_L) \qquad (2.33)$$

La obtención de formas de la Ecuación de la Cantidad de Movimiento en términos de Q, requiere la utilización de relaciones ya explicitadas en el parágrafo 2.1. Los resultados son

$$\frac{1}{\Omega g}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{\Omega^2 g}\frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{Q^2}{\Omega^3 g}\frac{\partial \Omega}{\partial s}\Big]_z + \frac{\partial z}{\partial s}\,(1 - Fr^2) + I_f = -\frac{q}{\Omega g}\,u_L \qquad (2.34)$$

que es la Ecuación de la Cantidad de Movimiento en términos de Q y z , y

$$\frac{1}{\Omega g}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{\Omega^2 g}\frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{Q^2}{\Omega^3 g}\frac{\partial \Omega}{\partial s}\Big]_h + \frac{\partial h}{\partial s}(1-Fr^2) - I_o + I_f = -\frac{q}{\Omega g}u_L \quad (2.35)$$

que es la Ecuación de la Cantidad de Movimiento en términos de Q y h , en las cuales se ha introducido el número de Froude local Fr , definido como

$$Fr(s,t) \equiv \left(\frac{Q^2 B}{\Omega^3 g}\right)^{1/2} \quad (2.36)$$

2.3. *Ecuación de la Energía*

La relación trabajo-energía mecánica provee su correspondiente ecuación de movimiento.

Dicha relación, aplicada al volumen elemental $\delta\forall$ definido en el parágrafo 2.1., establece que, durante un intervalo de tiempo δt , la variación de la energía mecánica contenida en su interior es igual al trabajo de las fuerzas exteriores que actúan sobre su superficie, menos el flujo neto de energía mecánica a través de esa misma superficie, y menos la energía mecánica perdida por disipación. A continuación, se procede a evaluar estos términos, a primer orden en δs y δt .

Sobre los contornos de $\delta\forall$ actúan las presiones y las tensiones de corte. Las presiones no realizan trabajo ni sobre el cauce, donde la componente normal de la velocidad es nula (condición de contorno cinemática) ni sobre la superficie libre, al considerarse nula la presión atmosférica. Entonces, solo trabajan las presiones sobre las secciones transversales extremas, cuya contribución es

$$\int_{\Omega(s)} p\,U\,\delta t\,d\Omega - \int_{\Omega(s+\delta s)} p\,U\,\delta t\,d\Omega \cong -\delta t\,\delta s\,\frac{\partial}{\partial s}\left(U\int_{\Omega(s)} p\,d\Omega\right) \quad (2.37)$$

donde p es la presión en cada punto de Ω y, además, se ha tenido en cuenta la uniformidad de la distribución de velocidades en cada sección.

Las tensiones de corte no realizan trabajo ni sobre la superficie libre, donde se anulan, ni sobre las secciones transversales, al considerarse despreciables las componentes transversales de la velocidad. Si además se tienen en cuenta que, en rigor, la velocidad es nula sobre el cauce (condición de no deslizamiento), las tensiones de corte tampoco realizan trabajo sobre él. Entonces,

el trabajo total de las fuerzas exteriores que actúan sobre el contorno de $\delta\forall$, al orden de aproximación considerado, está dado por (2.37).

La energía mecánica es la suma de la energía cinética y la energía potencial. La energía cinética perdida por convección a través de las secciones transversales extremas de $\delta\forall$, durante el intervalo δt, es

$$\rho Q\,(s + \delta s, t)\,\delta t\,\frac{U^2\,(s + \delta s, t)}{2} - \rho Q\,(s, t)\,\delta t\,\frac{U^2\,(s, t)}{2} \cong$$

$$\cong \frac{\rho}{2}\frac{\partial}{\partial s}\,(QU^2)\,\delta s\,\delta t = \rho\left(QU\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{U^2}{2}\frac{\partial Q}{\partial s}\right)\delta s\,\delta t \qquad (2.38)$$

Análogamente, la pérdida de energía cinética por el flujo lateral vale

$$\rho\, q\,\delta s\,\delta t\,\frac{V_L^2}{2} \qquad (2.39)$$

donde V_L es el módulo de la velocidad del flujo lateral.

Llamando ζ a la coordenada en la dirección de la gravedad, positiva hacia arriba y con origen en un plano horizontal de referencia, la energía potencial perdida en δt por el flujo a través de las secciones transversales extremas de $\delta\forall$, es

$$\int_{\Omega(s+\delta s)} \gamma\, U\,\delta t\,\zeta\, d\Omega - \int_{\Omega(s)} \gamma\, U\,\delta t\,\zeta\, d\Omega \cong \gamma\,\delta t\,\delta s\,\frac{\partial}{\partial s}\left(U\int_{\Omega(s)} \zeta\, d\Omega\right) \qquad (2.40)$$

Análogamente, el flujo lateral se lleva consigo una energía potencial que vale

$$\gamma\, q\,\delta s\,\delta t\,\zeta_L \qquad (2.41)$$

donde ζ_L es la altura a la que se interceptan el flujo lateral y el escurrimiento principal.

El haber considerado la existencia de un flujo lateral (siempre sujeto a la condición de no desvirtuar el análisis unidimensional del escurrimiento principal) lleva a la necesidad de tener en cuenta el trabajo que aquel realiza en el punto de contacto entre ambos, contribución que se agrega a (2.37). Si p_L es la presión en ese punto, el trabajo es

$$-p_L\, q\,\delta s\,\delta t \qquad (2.42)$$

habiéndose considerado despreciable la contribución de la tensión de corte.

Si bien una distribución uniforme de velocidades no produce disipación de energía, el haber utilizado explícitamente la condición de no deslizamiento sobre el cauce supone admitir la existencia de un gradiente de

velocidades, principalmente importante en las vecindades del cauce, el cual produce un efecto disipativo. Llamando ϵ_o (s, t) al valor medio sobre la sección transversal Ω (s, t) , de la energía disipada por unidad de volumen y de tiempo, el valor total sobre δV durante δt es

$$\epsilon_o \, \Omega \, \delta s \, \delta t \tag{2.43}$$

Finalmente, la variación en δt de la energía cinética contenida en $\delta \forall$, puede expresarse como

$$\rho\Omega\,(s, t + \delta t)\,\delta s \; \frac{U^2\,(s, t + \delta t)}{2} - \rho\Omega\,(s, t)\,\delta s \; \frac{U^2\,(s, t)}{2} \cong$$

$$\cong \frac{\rho}{2}\,\delta s\,\delta t \; \frac{\partial}{\partial t}\,(\Omega U^2) = \rho\,\delta s\,\delta t \left(Q \, \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U^2}{2} \, \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right) \tag{2.44}$$

mientras que la variación de la energía potencial es igual a la aportada por la masa neta almacenada durante δt , es decir

$$[\,\gamma\,\Omega\,(s, t + \delta t)\,\delta s - \gamma\,\Omega\,(s, t)\,\delta s\,]\,z\,(s, t) \cong \gamma\,\delta s\,\delta t\,z \; \frac{\partial \Omega}{\partial t} \tag{2.45}$$

donde z está medido respecto al origen de la coordenada ζ .

La Ecuación de la Energía para canales se obtiene, entonces, igualando la variación total, suma de (2.44) y (2.45), al trabajo exterior, suma de (2.37) y (2.42), menos la pérdida neta, suma de (2.38), (2.39), (2.40) y (2.41), y menos la energía disipada (2.43). Si a esta expresión se la divide por $\gamma\,Q\,\delta s\,\delta t$, se le toma el límite para δs y δt tendiendo a cero, y se la reordena, se llega a

$$\frac{1}{g}\,\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g}\,\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\epsilon_o}{\gamma U} = -\frac{1}{Q}\,\frac{\partial}{\partial s}\left[\, U \int \left(\frac{p}{\gamma} + \zeta\right) d\Omega \right] -$$

$$-\frac{z}{Q}\,\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{U^2}{2gQ}\left(\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t}\right) - \frac{q}{Q}\left(\frac{p_L}{\gamma} + \zeta_L + \frac{V_L^2}{2g}\right) \tag{2.46}$$

Como se considera que la distribución de presiones es hidrostática, se tiene que

$$\frac{p}{\gamma} + \zeta = z \tag{2.47}$$

Utilizando las ecuaciones (2.47) y (2.4) de Continuidad, la ecuación (2.46) se transforma en

$$\frac{1}{g}\,\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g}\,\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial s} + I_e = \frac{q}{U\Omega}\left[\left(z + \frac{U^2}{2g}\right) - \left(z_L + \frac{V_L^2}{2g}\right)\right] \tag{2.48}$$

donde $z_L \equiv \frac{p_L}{\gamma} + \zeta_L$ es la altura piezométrica del flujo lateral, y, además, se ha introducido la definición

$$I_e(s, t) \equiv \frac{\epsilon_o}{\gamma U} \tag{2.49}$$

denominada "pendiente de energía", la cual, por ser siempre positiva, representa una resistencia efectiva.

La ecuación (2.48) es la Ecuación de la Energía en términos de U y de z . Utilizando la ecuación (2.13) se obtiene la Ecuación de la Energía en términos de U y h

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g}\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial s} - I_o + I_e = \frac{q}{U\Omega}\left[\left(h + \frac{U^2}{2g}\right) - \left(h_L + \frac{V_L^2}{2g}\right)\right] \tag{2.50}$$

donde $h_L \equiv z_L - z_o$ es la altura piezométrica del flujo lateral respecto al fondo del canal. Es posible encontrar expresiones en términos de Q , análogamente a lo hecho con la Ecuación de la Cantidad de Movimiento. Estas son

$$\frac{1}{g\Omega}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{g\Omega^2}\frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{Q^2}{g\Omega^3}\frac{\partial \Omega}{\partial s}\Big]_z + \frac{\partial z}{\partial s}(1 - Fr^2) + I_e =$$

$$= \frac{q}{Q}\left[(z - z_L) - \frac{Q^2}{2g\Omega^2} - \frac{V_L^2}{2g}\right] \tag{2.51}$$

que es la Ecuación de la Energía en términos de Q y de z , y

$$\frac{1}{g\Omega}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{g\Omega^2}\frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{Q^2}{g\Omega^3}\frac{\partial \Omega}{\partial s}\Big]_h + \frac{\partial h}{\partial s}(1 - Fr^2) - I_o + I_e =$$

$$= \frac{q}{Q}\left[(h - h_L) - \frac{Q^2}{2g\Omega^2} - \frac{V_L^2}{2g}\right] \tag{2.52}$$

que es la Ecuación de la Energía en términos de Q y de h , en las cuales se ha utilizado el número de Froude local Fr definido en (2.36).

2.4. *Comparación entre las Ecuaciones de la Cantidad de Movimiento y de la Energía*

Las ecuaciones (2.31) y (2.48) de la Cantidad de Movimiento y de la Energía, respectivamente, presentan una estructura similar. De hecho, sólo difieren en la contribución dinámica del flujo lateral, y en el término resistivo. Esta similitud no es, en realidad, sorprendente si se advierte que la Ecuación de la Energía no se obtiene a partir del principio general de conservación de la

energía (o primera ley de la Termodinámica), sino de la relación trabajo-energía mecánica que, al igual que el principio de conservación de la cantidad de movimiento, es una consecuencia de la ley básica de movimiento de la mecánica (o segunda ley de Newton).

Precisamente, dada su similitud, es útil analizar sus diferencias. En principio, es necesario reiterar la distinción entre los conceptos de pendientes de fricción I_f y de energía I_e, tal cual fueron definidos en los parágrafos 2.2. y 2.3. respectivamente. La primera da cuenta de las tensiones de corte que el fluído ejerce sobre el cauce. La segunda, en cambio, representa la potencia disipada en el volumen de fluído.

Establecida la diferencia conceptual entre I_f e I_e, puede retornarse a las ecuaciones (2.31) y (2.48). De la comparación entre ambas surge que, en el caso de ausencia de flujo lateral $(q = 0)$,

$$I_e = I_f \tag{2.53}$$

Este resultado, lejos de constituir una relación general válida para un escurrimiento gradualmente variado, es fruto de las limitaciones del modelo teórico, como se muestra a continuación.

En la deducción de la Ecuación de la Energía se incurrió en una inconsistencia teórica al considerar explícitamente la verificación de la condición de no deslizamiento y la existencia de una gradiente de velocidades. En realidad, si se es consecuente con las hipótesis de partida, la distribución de velocidades debe ser estrictamente uniforme sobre cada sección transversal. Esto representa una situación ideal, en la cual la interacción entre el fluído y el cauce, en vez de ser de tipo viscoso, es similar a la interacción entre sólidos: deslizamiento relativo con fricción. Siendo así, en lugar de existir disipación de energía en el interior del fluído, las pérdidas están producidas por el trabajo resistivo del cauce. Esto significa que la contribución (2.43) puede ser reemplazada de la siguiente manera

$$\epsilon_o \, \Omega \, \delta s \, \delta t \rightarrow \tau_o \, \chi \, \delta s \, U \, \delta t$$

lo que equivale a admitir la igualdad (2.53.). En consecuencia, es de esperar que un planteo más realista lleve a un resultado algo distinto.

El razonamiento precedente pone de manifiesto, al mismo tiempo, que la Ecuación de la Energía y de la Cantidad de Movimiento son, dentro del marco teórico adoptado y en ausencia de flujo lateral, esencialmente diénticas.

Esto lleva a la necesidad de profundizar brevemente en las expresiones básicas de las cuales surgen esas ecuaciones, para dejar aclarados, por un lado, las causas de esa identidad, y por el otro, el significado de sus diferencias en los casos en que éstas existen.

En general, la ecuación de la cantidad de movimiento para una partícula fluída, no es más que un reordenamiento de la ecuación vectorial de movimiento de Newton. Por su parte, la ecuación de la energía es el producto escalar de la ecuación de Newton por el vector velocidad de la partícula; o, simplemente, el producto de la componente de la ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección de su trayectoria, por su velocidad. Al integrar estas expresiones sobre una extensión finita del fluído, esa simple relación de proporcionalidad entre ambas(que, de hecho, equivale a una identidad) sólo se mantendrá en el caso muy particular en que se verifiquen las dos condiciones siguientes sobre el dominio de integración: en primer lugar, que el movimiento sea paralelo y, en segundo lugar, que la distribución transversal de la velocidad sea uniforme. Precisamente, tal es la situación si, dentro del marco teórico adoptado, se toma $q = 0$. La eliminación de cualquiera de esas dos restricciones, conduce a dos ecuaciones no sólo distintas, sino inconvertibles entre sí.

En el Modelo de Saint Venant, la segunda condición está asegurada. En cambio, la primera condición se viola si existe flujo lateral, el cual conduce a la aparición de cantidad de movimiento en una dirección transversal. En este caso, entonces, ambas ecuaciones son distintas e inconvertibles entre sí. Aún así no son independientes, en el siguiente sentido: la diferencia entre ambas provee información sobre el balance de la cantidad de movimiento en esa dirección transversal al escurrimiento: dicha información es sólo complementaria en un análisis unidimensional; es decir, no interesa en relación al cálculo de las variables dependientes primarias del escurrimiento (por ejemplo U y Z). En consecuencia, en el planteo de un problema, la Ecuación de Continuidad ha de aparecer acompañada por una sola de las ecuaciones de movimiento.

La pendiente de fricción en un caso, o la de energía en el otro, constituyen una nueva incógnita que se agrega a las dos originales (U y z) . Esto significa que hace falta aún otra ecuación para completar el planteo. Su formulación se discute en el punto siguiente. Conocida una pendiente, la otra puede calcularse de la relación siguiente, que surge de la resta entre las ecuaciones

(2.48) y (2.31)

$$I_e = I_f + \frac{q}{Q}\left[\left(z + \frac{U^2}{2g}\right) - \left(z_L + \frac{V_L^2}{2g}\right) - \frac{U}{g}(U - u_L)\right] =$$

$$= I_f + \frac{q}{Q}\left(\Delta z - \frac{\Delta V^2}{2g}\right) \qquad (2.54)$$

donde $\Delta z \equiv z_L - z$ es la diferencia entre alturas piezométricas, y ΔV es el módulo de la velocidad relativa del flujo lateral respecto del escurrimiento principal.

Ya se advirtió en los parágrafos precedentes que el flujo lateral debe ser de una magnitud tal que no desvirtúe la posibilidad de aplicar el análisis unidimensional. De hecho, aún con pendientes débiles del fondo, el flujo lateral puede provocar la aparición de zonas de flujo rápidamente variable. En rigor el módulo de la descarga lateral no es el único factor determinante. También influyen la dirección de entrada del flujo lateral y su altura piezométrica, tal cual surge de sus contribuciones en las ecuaciones (2.31) y (2.48). En la práctica, cada caso requiere un análisis particular.

Para terminar con este parágrafo, es útil analizar las consecuencias que impone el principio general de conservación de la energía. Por un lado, la energía mecánica del flujo medio, disipada durante un intervalo de tiempo, puede en general producir: un acrecentamiento de la turbulencia, un aumento de la energía interna del fluído, un trabajo de expansión, y una entrega de calor al medio ambiente. En realidad, habiéndose considerado incompresible al fluído, no puede existir un trabajo de expansión. Además, la propia energía turbulenta es, finalmente, transformada irreversiblemente en energía interna, bajo la acción de la viscosidad. Por otro lado, la variación del estado termodinámico del medio ambiente, en particular de su temperatura, por causas ajenas a la existencia del escurrimiento, puede acentuar o revertir el proceso de conducción de calor entre ambos. De acuerdo a esto, se producirá, en definitiva, una disminución o un aumento de la energía interna del fluído y, en consecuencia, de su temperatura.

La inhomogeneidad de todo el proceso disipativo determina distintas variaciones locales de temperatura en el seno del fluído. Por un lado, esto se traduce en el establecimiento de gradientes de temperatura que generan, a su vez, un proceso de conducción de calor tendiente a homogeneizarlas. Por

otro lado, todas las propiedades del fluído se ven sometidas a distribuciones heterogéneas. Esto no afecta el análisis que condujo a las ecuaciones unidimensionales, ya que las variaciones de la densidad del agua líquida con la temperatura pueden considerarse despreciables [1], y las otras propiedades sólo influyen indirectamente, a través de la evaluación de los términos resistivos.

2.5. *Parametrización de los Efectos Resistivos*

En el Apéndice I aparecen sintetizadas, en términos de diversas variables, las expresiones de las Ecuaciones de Continuidad, Cantidad de Movimiento y Energía. Además, en el Apéndice II se obtienen las formas de esas ecuaciones en un sistema de referencia móvil.

Las ecuaciones de la Cantidad de Movimiento y de la Energía no son independientes entre sí, tal cual se hizo notar en el punto anterior. La elección de cual de ellas debe acompañar a la Ecuación de Continuidad en el planteo de un problema depende, esencialmente, de la posibilidad de estimar el término resistivo en alguna de esas ecuaciones (I_f e I_e, respectivamente).

Básicamente, I_f e I_e representan efectos resistivos resultantes de la transmisión irreversible de cantidad de movimiento y de energía hacia las escalas no resueltas en el análisis (movimientos molecular y turbulento y flujo medio puntual). Los tratamientos exclusivamente teóricos desarrollados para evaluar estos efectos son complejos y aún poco satisfactorios desde un punto de vista práctico, por lo cual se recurre a la experiencia. Esta indica que, en escurrimientos libres de sedimentos y a cauce fijo, la tensión de corte media τ_o sobre el cauce en una sección (o, alternativamente, la potencia media disipada ϵ_o por unidad de área), es función de las siguientes variables independientes [15]: la densidad ρ y la viscosidad μ del fluído; la intensidad g del campo de fuerzas gravitatorio; la forma geométrica de la sección transversal del canal, representada por un coeficiente adimensional ϵ ; la rugosidad de la superficie del cauce, medida por la altura efectiva k de sus irregularidades; la no uniformidad del canal en forma y alineación, representada por un coeficiente adimensional Θ , el tirante hidráulico T (definido como $T \equiv \Omega / B$); la velocidad media de flujo U; y la impermanencia, medida, por ejemplo, por $\partial T/\partial t$. Es decir

$$\tau_o = \tau_o\left(\rho, \mu, g, \epsilon, k, \Theta, T, U, \frac{\partial T}{\partial t}\right) \tag{2.55}$$

Si la densidad, el tirante y la velocidad se combinan con las magnitudes restantes, la ecuación (2.55) puede reducirse a la siguiente relación entre grupos adimensionales [16]

$$\frac{\tau_o}{\rho U^2} = C_\tau \left(\frac{\mu}{\rho UT} , \frac{gT}{U^2} , \epsilon , \frac{k}{T} , \Theta , \frac{1}{U} \frac{\partial T}{\partial t} \right) \tag{2.56}$$

Esta expresión puede interpretarse como una ecuación de proporcionalidad entre τ_o y ρU^2, donde el factor de proporcionalidad C_τ depende del número de Reynolds $(Re \equiv \rho UT/\mu)$, el número de Froude $(Fr \equiv U/\sqrt{gT})$, la forma geométrica (ϵ), la rugosidad relativa (k/T), la irregularidad del canal (Θ) y el grado de impermanencia $(1/U.\partial T/\partial t)$. De la ecuación (2.56) y la definición (2.32) de pendiente de fricción surge que

$$U = C \sqrt{RI_f} \tag{2.57}$$

donde $C \equiv (g / C_\tau)^{1/2}$ es el coeficiente de Chezy. No existen, en la actualidad, formulaciones generales para C. En rigor, sólo se han desarrollado una variedad de tratamientos empíricos y semiempíricos, con diversos rangos de aplicación, para flujo uniforme [5, 17, 18].

En flujo uniforme las últimas dos variables en la ecuación (2.56) ya no cuentan, pues el canal debe ser prismático y el escurrimiento estacionario. Por su parte, el número de Froude sólo influye si se supera el valor límite de estabilidad, a partir del cual se desarrollan ondas superficiales [15]. Si se restringe el análisis a valores menores que ese límite, puede descartarse Fr como variable (en rigor, debe excluirse, también, el entorno de valores alrededor del régimen crítico donde $Fr \cong 1$). En la práctica, en escurrimientos a alto número de Reynolds, los cauces se comportan generalmente como hidráulicamente rugosos (es decir, no existe una sub-capa límite laminar). En esta situación C se hace prácticamente independiente del número de Reynolds. La relación más simple utilizada entonces es la fórmula de Manning

$$C = \frac{R^{1/6}}{n} \tag{2.58}$$

donde R es el radio hidráulico y n el coeficiente de Manning, característico de la rugosidad de la superficie del cauce, que se encuentra tabulado [15, 17].

En escurrimientos gradualmente variados se acepta habitualmente la siguiente hipótesis [5, 19]:

— El coeficiente de Chezy (o el de Manning) en una sección puede aproximarse por el valor que tendría si el escurrimiento la atravesara con el mismo tirante y la misma velocidad, bajo condiciones de uniformidad. Esto significa que se desprecian los efectos locales de la irregularidad del canal (Θ) y los del grado de impermanencia ($1/U.\partial T/\partial t$)

Su aplicación en la práctica ingenieril puede consultarse en los manuales de Hidráulica de Canales [5, 20, 21].

Todas estas consideraciones valen, de acuerdo a lo dicho, para escurrimientos a cauce fijo. Por cauce fijo se entiende no sólo que su forma es invariable, sino también que, en su interacción con el fluído, puede ser considerado como un sólido rígido. En canales con lecho de material suelto esta última condición no se verifica, y si bien es común en la práctica ingenieril dispensarles de todos modos el mismo tratamiento, investigaciones recientes [22, 23] parecen confirmar que existen fuertes influencias de la naturaleza del cauce sobre los efectos resistivos.

En escurrimientos gradualmente variados sin flujo lateral $I_e \cong I_f$, tal cual se hizo notar en el parágrafo 2.4. En consecuencia, de la ecuación (2.57) surge que

$$I_e = I_f = \frac{U^2}{C^2 R} \tag{2.59}$$

donde C se calcula, entonces, de acuerdo a la fórmula de Manning, ecuación (2.58).

En escurrimientos gradualmente variados con flujo lateral, las pendientes de fricción y de energía ya no coinciden [24], sino que están relacionadas a través de la ecuación (2.54). Bajo estas condiciones es necesario analizar, para cada caso particular, cual de las dos puede ser aproximada por la ecuación (2.59).

Si el flujo lateral es entrante ($q < 0$), ya sea por precipitación o debido al aporte de un escurrimiento lateral, la componente u_L de la velocidad del flujo lateral en la dirección del escurrimiento es, en principio, conocida (en general nula). Por otro lado, el proceso de mezcla producido por el encuentro de los dos flujos, debe necesariamente aumentar la disipación por sobre el nivel que alcanzaría en una situación de escurrimiento sin aporte lateral, para los mismos valores de los tirantes [11, 17]. En cambio, es de esperar que la

variación correspondiente de la tensión de corte sobre el cauce sea menor, al depender ésta sólo de la distribución de velocidades en su vecindad [11]. Estas consideraciones llevan a la conclusión de que, en este caso particular, es conveniente utilizar la Ecuación de la Cantidad de Movimiento, con I_f expresada por la ecuación (2.59).

En situaciones de flujo lateral saliente $(q > 0)$ por división del escurrimiento (por ejemplo, a través de vertederos laterales), el proceso es, en general, lo suficientemente suave como para suponer que el fluído que escapa lleva consigo la misma altura de carga que poseía en el canal principal [11, 17]. En cambio, es difícil determinar cual es su componente de velocidad [11]. Si, además, se admite que la potencia disipada no es apreciablemente mayor que la producida en flujo localmente uniforme (lo que no es evidente), puede utilizarse la Ecuación de la Energía, con I_e expresada por la ecuación (2.59).

Si el flujo lateral se produce por filtración (entrante o saliente) a través de la superficie del cauce, puede considerarse que $V_L \cong 0$ y $z_L \cong z$ [11]. Además, es de esperar que el cuerpo principal del flujo no vea mayormente afectado respecto a la situación de ausencia de filtraciones, por lo cual tampoco debería variar apreciablemente la disipación. En cambio, la tensión de corte debe verse afectada por la variación de velocidades en la vecindad del cauce [11]. Nuevamente, entonces, es conveniente utilizar la Ecuación de la Energía, con I_e dada por la ecuación (2.59).

En síntesis, y siguiendo una presentación análoga a la de Strelkoff [11] la Ecuación de Movimiento para flujo gradualmente variado puede escribirse, en términos de U y de z, como

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g}\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{U|U|}{C^2R} = D_{L1} \qquad (2.60.a)$$

o, en términos de Q y de z,

$$\left.\frac{1}{g\Omega}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{g\Omega^2}\frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{Q^2}{g\Omega^3}\frac{\partial \Omega}{\partial s}\right]_z + \frac{\partial z}{\partial s}(1 - Fr^2) + \frac{Q|Q|}{C^2\Omega^2R} = D_{L2} \qquad (2.60.b)$$

donde, en ambos casos, el término resistivo se ha expresado en forma tal que, cualquiera sea el signo de U o de Q, produzca un efecto desacelerativo; además, Fr está dado por la ecuación (2.36)

$$Fr \equiv \left(\frac{BQ^2}{g\Omega^3}\right)^{1/2} \qquad (2.36)$$

y los aportes dinámicos D_{L1} y D_{L2} del flujo lateral valen

$D_{L1} = 0$	$D_{L2} = 0$	para flujo lateral nulo $(q = 0)$	(2.61.a)
$D_{L1} = \frac{q}{\Omega g}(U - u_L)$	$D_{L2} = -\frac{q u_L}{\Omega g}$	para flujo lateral entrante por precipitación o escurrimiento lateral $(q < 0)$	(2.61.b)
$D_{L1} = 0$	$D_{L2} = -\frac{qQ}{\Omega^2 g}$	para flujo lateral saliente por vertedero lateral $(q > 0)$	(2.61.c)
$D_{L1} = \frac{qU}{2\Omega g}$	$D_{L2} = -\frac{qQ}{2\Omega^2 g}$	para filtraciones	(2.61.d)

Las ecuaciones (2.60.a) ó (2.60.b), junto con sus respectivas ecuaciones de continuidad, se denominan Ecuaciones de Saint Venant, y constituyen las expresiones utilizadas en la práctica para el análisis unidimensional del escurrimiento en canales.

2.6. *Reseña sobre Métodos de Resolución*

Las Ecuaciones de Saint Venant describen en forma unidimensional un escurrimiento en régimen impermanente gradualmente variado. Son casos particulares de esas ecuaciones: el régimen permanente gradualmente variado, y el permanente uniforme, tal cual se esquematiza a continuación [17]:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g}\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial s} - D_{L1} \qquad \frac{U|U|}{C\,R} = I_o \qquad (2.60.c)$$

$$B\frac{\partial h}{\partial t} + BU\frac{\partial h}{\partial s} + \Omega\frac{\partial U}{\partial s} \qquad U\frac{\partial \Omega}{\partial s}\Big]_h + q + 0 = 0 \qquad (2.10)$$

Permanente Uniforme

Permanente Gradualmente Variado

Impermanente Gradualmente Variado

La Hidráulica de Canales de cauce rígido ha profundizado continuamente, desde Chezy (1769) hasta el presente, el entendimiento del escurrimiento a régimen permanente [5, 17]. Más limitados, desde los puntos de vista experimental, teórico y práctico, son los avances logrados en régimen impermanente.

En el caso permanente es posible obtener, a partir de las ecuaciones (2.60.b) y (2.4), una expresión para la pendiente dz/ds del pelo de agua

$$\frac{dz}{ds} = \frac{-\dfrac{Q\,|Q|}{C^2\Omega^2 R} + \left(\dfrac{2qQ}{\Omega^2 g} + D_{L2}\right) + \dfrac{Q^2}{g\Omega^3}\left.\dfrac{\partial\Omega}{\partial s}\right]_z}{1 - Fr^2} \tag{2.62}$$

donde el segundo miembro, expresado en términos de la descarga Q, es aún función implícita de z a través de Ω, R y C. Además, D_{L2} está dado por las ecuaciones (2.61).

En la ecuación (2.62) aparecen explícitas las contribuciones de la resistencia, el flujo lateral y la variación de forma del canal, además de la singularidad que se produce en la sección crítica $(Fr = 1)$. A partir de esa ecuación es posible establecer una clasificación de los tipos de perfil, obtener soluciones en casos simples, y desarrollar métodos de cálculo numérico en casos más complejos [15, 17].

Particularizando la expresión de D_{L2}, la ecuación (2.62) se desglosa en

$$\frac{dz}{ds} = \frac{-\dfrac{Q\,|Q|}{C^2\Omega^2 R} + \dfrac{Q^2}{\Omega^3 g}\left.\dfrac{\partial\Omega}{\partial s}\right]_z}{1 - Fr^2} \tag{2.62.a}$$

para flujo lateral nulo,

$$\frac{dz}{ds} = \frac{-\dfrac{Q\,|Q|}{C^2\Omega^2 R} + \dfrac{q}{\Omega g}\left(2\,\dfrac{Q}{\Omega} - u_L\right) + \dfrac{Q^2}{\Omega^3 g}\left.\dfrac{\partial\Omega}{\partial s}\right]_z}{1 - Fr^2} \tag{2.62.b}$$

para flujo lateral entrante por precipitación o escurrimiento lateral $(q < 0)$,

$$\frac{dz}{ds} = \frac{-\dfrac{Q\,|Q|}{C^2\Omega^2 R} + \dfrac{qQ}{\Omega^2 g} + \dfrac{Q^2}{\Omega^3 g}\left.\dfrac{\partial\Omega}{\partial s}\right]_z}{1 - Fr^2} \tag{2.62.c}$$

para flujo lateral saliente por vertederos laterales $(q > 0)$, y

$$\frac{dz}{ds} = \frac{-\dfrac{Q\,|Q|}{C^2\Omega^2R} + \dfrac{3}{2}\,\dfrac{qQ}{\Omega^2 g} + \dfrac{Q^2}{\Omega^3 g}\left.\dfrac{\partial\Omega}{\partial s}\right]_z}{1 - Fr^2} \qquad (2.62.d)$$

para filtraciones.

En su forma general, las Ecuaciones de Saint Venant se utilizan para estudiar fenómenos de traslación de ondas en canales. A pesar de sus expresiones relativamente simples, su resolución matemática es compleja. Constituyen un sistema hiperbólico de ecuaciones diferenciales (los cuales aparecen siempre ligados a fenómenos de propagación de ondas con velocidad finita) que, en consecuencia, puede analizarse por el Método de las Curvas Características [5, 17, 25, 26]. Este permite reconocer el tipo de condiciones iniciales y de contorno que es necesario especificar para determinar la solución, de acuerdo al régimen de escurrimiento (subcrítico o supercrítico). Además, en base a él se obtienen soluciones explícitas en los pocos casos simples en que existen.

En los últimos años se han dado algunos pasos hacia la obtención de integrales completas de las Ecuaciones de Saint Venant [27]. No obstante, el desarrollo de los métodos analíticos de resolución se ha visto relegado frente al avance de los métodos numéricos, complementados con la utilización de computadoras de alta velocidad y capacidad de memoria. En este sentido, se dispone de una variedad de tratamientos en base a la representación en diferencias finitas de las propias Ecuaciones de Saint Venant [28, 29, 30], o bien de sus Ecuaciones Características [25, 31]. Es más, la aplicación práctica de estos métodos, implementada en la forma de modelos matemáticos de cursos de agua naturales, ha dado lugar a formas indirectas de evaluación del coeficiente de Chezy medio en cada tramo de discretización, denominadas técnicas de "calibración" del modelo [28].

2.7. *Extensiones*

Las situaciones prácticas que no se adaptan al modelo teórico de Saint Venant deberían ser tratadas, en principio, por medio de modelos más generales. En este sentido se avanza en el capítulo siguiente, todavía en base a un análisis unidimensional. Nuevas posibilidades surgen a partir de los análisis bi y tridimensional. Sin embargo, a medida que aumenta el grado de refinamiento del modelo teórico, aumenta también la complejidad del método de resolución.

Es más, hacen falta nuevos tipos de información, y en mayor cantidad. Precisamente, lo que torna tan atractivas a las Ecuaciones de Saint Venant es su simplicidad en este último aspecto.

Existen casos en los cuales las desviaciones respecto del modelo de Saint Venant se manifiestan, esencialmente, en delimitadas zonas del escurrimiento. Si a éstas se las considera como "interfases" entre regiones de flujo gradualmente variado, es posible aún utilizar las Ecuaciones de Saint Venant, siempre y cuando pueda disponerse de tratamientos complementarios para esas interfases.

El resalto hidráulico es un caso clásico. En las regiones donde se producen cambios de régimen subcrítico a supercrítico, o viceversa, las líneas de corriente presentan fuertes curvaturas y/o divergencias, invalidando una de las hipótesis del modelo de Saint Venant. Sin embargo, cuando la transición es abrupta (resalto hidráulico), es decir, se produce sobre una distancia mucho menor que la escala de análisis unidimensional, puede interpretarse simplemente como una discontinuidad (tanto en el nivel como en la velocidad) sobre un escurrimiento que, en lo que resta, es gradualmente variado (ver Figura 2.4.).

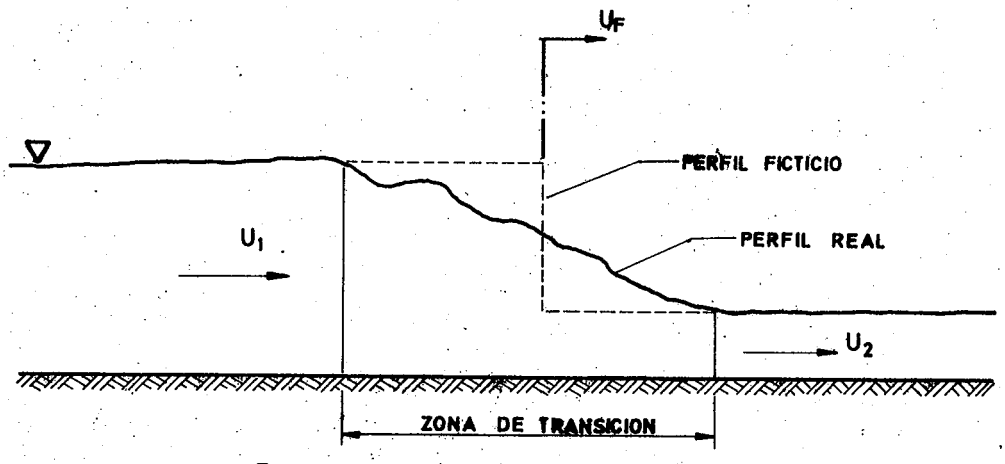


Figura 2.4. Esquematización del salto hidráulico en un análisis unidimensional (corte longitudinal)

A esta singularidad se la considera entonces como un "contorno interno", eventualmente móvil, a través del cual se verifican las siguientes condiciones:

$$U_F = \frac{U_1\Omega_1 - U_2\Omega_2}{\Omega_1 - \Omega_2} \tag{2.63}$$

$$\left|U_1 - U_2\right| = \left[\frac{g}{\Omega_1\Omega_2}\,(\Omega_1 - \Omega_2)\,(\bar{h}_1\Omega_1 - \bar{h}_2\Omega_2)\right]^{1/2} \tag{2.64}$$

donde los subíndices 1 y 2 se refieren a las zonas de mayor (subcrítico) y menor profundidad (supercrítico), respectivamente; h es la profundidad del centroide del área transversal Ω, y U_F la velocidad del resalto.

Otro caso de importancia práctica lo constituyen los canales con "doble perfil". Ellos presentan un cauce menor, continuamente anegado, y uno mayor, sólo ocupado temporalmente (para las épocas de las crecidas en ríos naturales), tal cual se muestra en la Figura 2.5. En estas últimas circunstancias pueden reconocerse, esencialmente, dos situaciones, dependiendo de las profundidades respecto del cauce mayor (o valle de inundación), cada una de las cuales admite consideraciones distintas.

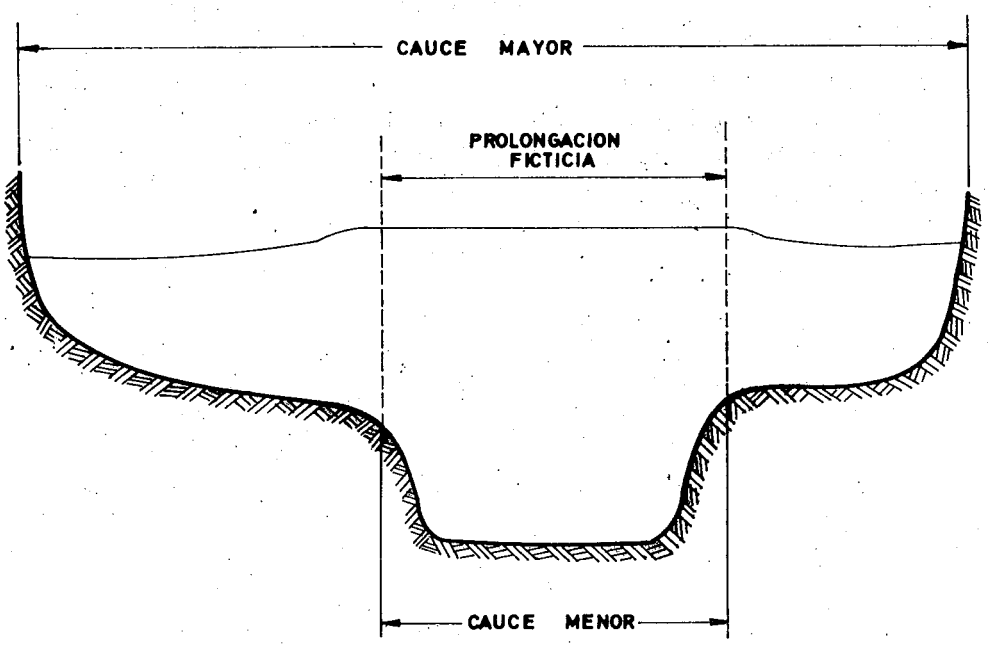


Figura 2.5. Canal con doble perfil (corte transversal)

Cuando esas profundidades son pequeñas se distinguen, en general, dos o tres zonas: una central y una o dos laterales, cuyos límites son, aproximadamente, la prolongación ficticia del cauce menor (ver Figura 2.5.). Cada una de ellas puede ser tratada como un escurrimiento gradualmente variado, con su propia velocidad media, tirante hidráulico y coeficiente de Chezy. Este último varía de una u otra región no sólo debido a las distintas formas de sección transversal, sino también porque la rugosidad es generalmente mayor sobre el valle de inundación. En la zona de trancisión entre los "escurrimientos paralelos", se produce intercambio de fluído y, en consecuencia, de cantidad de movimiento y de energía. Modelar este "contorno permeable" es, sin duda, un problema dificultoso, no existiendo hasta el momento un tratamiento general satisfactorio. Thirriot [32] ha propuesto una forma válida para los primeros estados de inundación.

Cuando las profundidades respecto del cauce mayor son grandes, el flujo de intercambio entre zonas se produce sin variaciones apreciables en el nivel de la superficie libre. Entonces, ya no es necesaria esa división del escurrimiento, sino que puede tratárselo globalmente. Sin embargo, aún debe modificarse ligeramente el modelo de Saint Venant, descartando la hipótesis sobre distribución uniforme de velocidades y, en consecuencia, introduciendo en la Ecuación de Movimiento el coeficiente de distribución de velocidades α o β [17] (ver Capítulo 3).

CAPITULO 3

ECUACIONES UNIDIMENSIONALES GENERALES

Las Ecuaciones Unidimensionales Generales del escurrimiento en canales se obtienen de las de Navier-Stokes. En flujos turbulentos, el primer paso de este desarrollo consiste en hallar las ecuaciones que describen el movimiento medio estadístico del fluído. Estas últimas se denominan Ecuaciones de Reynolds, y resultan de promediar las de Navier-Stokes sobre un intervalo de tiempo lo suficientemente grande como para incluir el pasaje a través de cada punto de un número de torbellinos estadísticamente significativo, pero a la vez lo suficientemente pequeño como para excluir la variación gradual del flujo en el tiempo [2, 31].

Keulegan [8] fue el primero (1942) en presentar un tratamiento de este tipo, con la introducción de hipótesis simplificativas respecto a los efectos turbulentos. En 1969, Strelkoff [11] desarrolló una formulación mucho más general y formalmente más completa, donde se cuantifican, esencialmente, todos los efectos de heterogeneidad, impermanencia y turbulencia. A partir de entonces se incluyeron en varios trabajos tratamientos similares [12, 24, 34], o incluso aún más generales, como el de Yen [13], que presenta ecuaciones para un fluído compresible y heterogéneo sobre un cauce erosionable, o el de Iwasa [14], que brinda expresiones en un sistema general de coordenadas curvilíneas ortogonales.

En este Capítulo se formulan las Ecuaciones Unidimensionales Generales a partir de las de Reynolds, para lo cual se ha adoptado una línea de trabajo similar a la de Strelkoff [11]. En el primer parágrafo (3.1.) se establece el planteo matemático básico. En el segundo parágrafo (3.2.) se obtiene la Ecuación de Continuidad. En el tercero (3.2.) se desarrolla una expresión formal para una distribución arbitraria de presiones, la cual se utiliza en los dos parágrafos siguientes (3.4. - 3.5.), donde se obtienen las Ecuaciones de la Cantidad de Movimiento y Energía, respectivamente. Finalmente, en el último parágrafo

(3.6.) se efectúan acotaciones sobre algunos de los parámetros que figuran en aquellas ecuaciones.

3.1. *Planteo Básico*

Antes de introducir las ecuaciones de partida, es necesario explicar la notación adoptada. Se utiliza, en general, la notación tensorial: x_i , con el subíndice i variando entre 1 y 3 , son las coordenadas cartesianas de un punto de la masa fluída; u_i la componente en la dirección x_i de la velocidad; etc. La repetición de subíndices en un mismo término significa sumatoria sobre los tres valores posibles. Donde es conveniente, por razones de claridad, se recurre a la notación "explícita"; por ejemplo, se utilizan los símbolos u , v , w para las componentes de la velocidad según x_1 , x_2 , x_3 , respectivamente, etc.

3.1.1. Ecuaciones Puntuales

El flujo turbulento puede desglosarse en un flujo medio estadístico y en otro fluctuante cuya media es nula. Por sencillez de notación, las variables que describen al flujo medio se las denota en lo que sigue sin aditamento alguno; por ejemplo, u_i es la velocidad media en la dirección x_i . Por su parte, se añade una tilde a la correspondiente componente fluctuante, u_i . Entonces, las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía para todo punto del escurrimiento son, respectivamente 2, 33

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.1}$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \overline{\rho u_i' u_j'} \right) \tag{3.2}$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{V^2}{2}\right) = - u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho u_i g_i + u_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \overline{\rho u_i' u_j'} \right) \tag{3.3}$$

donde ρ y μ son la densidad y la viscosidad del fluído, respectivamente; p la presión; g_i la componente i de la aceleración de la gravedad; V el módulo del vector velocidad, de componentes u_i .

En las Ecuaciones (3.2) y (3.3) se observa que el efecto neto de la turbulencia sobre el flujo medio se condensa en un solo término, que de-

sempeña un papel análogo al de las tensiones viscosas. Precisamente, los productos $-\rho\overline{u_i'u_j'}$ se conocen como tensiones de Reynolds, y se los agrupa con las anteriores bajo la denominación global de tensiones de deformación τ_{ji} . Es decir

$$\tau_{ji} \equiv \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho\overline{u_i'u_j'} \tag{3.4}$$

Por otra parte, las componentes de la aceleración de la gravedad g_i , pueden escribirse como

$$g_i = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \tag{3.5}$$

donde ζ es la coordenada vertical, positiva hacia arriba.

Utilizando las Ecuaciones (3.4) y (3.5), las Ecuaciones (3.2) y (3.3) se transforman en

$$\frac{1}{g}\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{u_j}{g}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\gamma} + \zeta\right) + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{V^2}{2g}\right) + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{V^2}{2g}\right) = -u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\gamma} + \zeta\right) + \frac{u_i}{\gamma}\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \tag{3.7}$$

donde $\gamma = \rho g$, es el peso específico del líquido.

3.1.2. Ecuaciones Integrales

Las Ecuaciones (3.1), (3.6) y (3.7) pueden ser integradas sobre un volumen $\forall$ (t) arbitrario, móvil y continuamente deformable, siempre lleno de fluído. La transformación de las expresiones así obtenidas en ecuaciones aptas para ser aplicadas en problemas de escurrimiento en canales, requiere la utilización de algunas relaciones matemáticas que se exponen a continuación.

— Teorema de Gauss [35]

$$\int_{\forall} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\, dV = \int_A F_j n_j dA \tag{3.8.a}$$

donde F_i es una función vectorial continua y derivable del espacio (aquí el tiempo es un parámetro), A es la superficie que encierra el volumen $\forall$, y n_i es el versor normal exterior a A .

— Corolario del Teorema de Gauss [35]

$$\int_{\forall} \frac{\partial f}{\partial x_i} dV = \int_A f n_i dA \tag{3.8.b}$$

donde f es una función escalar continua y derivable del espacio.

— Teorema general del transporte [1]

$$\int_{\forall} \frac{\partial f}{\partial t} dV = \frac{d}{dt} \int_{\forall} f dV - \int_A f w_j n_j dA \tag{3.9}$$

donde f ahora debe ser también una función escalar continua y derivable del tiempo, y w_j es la velocidad local de la superficie A .

— Identidad vectorial [35]

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (f F_i) = F_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + f \frac{\partial F_k}{\partial x_k} \tag{3.10}$$

A continuación se procede, entonces, a transformar las ecuaciones puntuales de continuidad, cantidad de movimiento y energía.

La ecuación de continuidad, Ecuación (3.1), integrada sobre el volumen $\forall(t)$ resulta en

$$\int_{\forall} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\forall = 0$$

que, utilizando (3.8.a), se transforma en

$$\int_A u_j n_j dA = 0 \tag{3.11}$$

Por otra parte, si en (3.9) se elige $f \equiv 1$, surge

$$\frac{d\forall}{dt} - \int_A w_j n_j dA = 0 \tag{3.12}$$

Sumando miembro a miembro las Ecuaciones (3.11) y (3.12) se obtiene la ecuación de continuidad en su forma integral

$$\frac{d\forall}{dt} + \int_A (u_j - w_j) n_j dA = 0 \tag{3.13}$$

La Ecuación (3.13) expresa que la variación del volumen $\forall$ se debe al flujo de fluido a través de su superficie, la cual se mueve con velocidad w_j .

La ecuación puntual de la cantidad de movimiento, Ecuación (3.6), integrada sobre el volumen $\forall(t)$ resulta en

$$\frac{1}{g}\int_{\forall}\frac{\partial u_i}{\partial t}d\forall+\frac{1}{g}\int_{\forall}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}d\forall=-\int_{\forall}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\gamma}+\zeta\right)d\forall+\frac{1}{\gamma}\int_{\forall}\frac{\partial\tau_{ji}}{\partial x_j}d\forall \qquad (3.14)$$

La transformación de la Ecuación (3.14) término a término se hace como sigue. Para el primero se utiliza (3.9), obteniéndose

$$\frac{1}{g}\int_{\forall}\frac{\partial u_i}{\partial t}d\forall=\frac{1}{g}\frac{d}{dt}\int_{\forall}u_i d\forall-\frac{1}{g}\int_{A}u_i w_j n_j dA \qquad (3.15)$$

Haciendo uso de la identidad vectorial (3.10) y de la Ecuación (3.1), el segundo término se transforma en

$$\frac{1}{g}\int_{\forall}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}d\forall=\frac{1}{g}\int_{\forall}\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j)\,d\forall$$

y aplicando (3.8.a) se llega a

$$=\frac{1}{g}\int_{A}u_i u_j n_j dA \qquad (3.16)$$

El primer término del segundo miembro de la Ecuación (3.14), utilizando (3.8.b), puede escribirse como

$$-\int_{\forall}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\gamma}+\zeta\right)d\forall=-\int_{A}\left(\frac{p}{\gamma}+\zeta\right)n_i dA \qquad (3.17)$$

Para el segundo término se hace uso de (3.8.a), obteniéndose

$$\frac{1}{\gamma}\int_{\forall}\frac{\partial\tau_{ji}}{\partial x_j}d\forall=\frac{1}{\gamma}\int_{A}\tau_{ji}n_j dA \qquad (3.18)$$

Reemplazando las Ecuaciones (3.15) a (3.18) en la Ecuación (3.14), se obtiene la ecuación de la cantidad de movimiento en su forma integral

$$\frac{1}{g}\frac{d}{dt}\int_{\forall}u_i d\forall+\frac{1}{g}\int_{A}u_i(u_j-w_j)n_j dA=-\int_{A}\left(\frac{p}{\gamma}+\zeta\right)n_i dA+\frac{1}{\gamma}\int_{A}\tau_{ji}n_j dA \qquad (3.19)$$

El primer miembro de la Ecuación (3.19) representa la variación temporal de la cantidad de movimiento en la dirección x_i contenida dentro de $\forall$, más la pérdida por el flujo de cantidad de movimiento a través de su superficie (todo dividido por γ). Para interpretar adecuadamente el primer término del segundo miembro de la Ecuación (3.19), conviene advertir que la distribución de presiones puede ser desglosada en dos partes [1]: una parte $-\gamma\zeta$ que equilibra exactamente a la fuerza gravitoria por unidad de masa (Ecuación (3.5)), y la otra, p_r, que proviene exclusivamente del movimiemto del fluido. Es decir,

$$p=-\gamma\zeta+p_r \qquad (3.20)$$

Sobre cada partícula fluida, entonces, la presión efectiva es p_r . Siendo así, el primer término del segundo miembro de la ecuación (3.19) representa la fuerza neta de presión que actua sobre el contorno de $\forall$, en la dirección x_i . Por su parte, el segundo término de ese mismo miembro constituye la componente según x_i , de la fuerza resultante de la acción de las tensiones de deformación sobre la superficie A (todo este miembro aparece dividido, también por γ).

La ecuación puntual de la energía, Ecuación (3.7), integrada sobre el volumen $\forall(t)$ resulta en

$$\int_{\forall} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{V^2}{2g}\right) d\forall + \int_{\forall} u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{V^2}{2g}\right) dV =$$

$$= -\int_{\forall} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\gamma} + \zeta\right) d\forall + \frac{1}{\gamma}\int_{\forall} u_i \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} d\forall \qquad (3.21)$$

La transformación del primer miembro es análoga a la realizada sobre el de la Ecuación (3.14), por lo que se obtiene

$$\int_{\forall} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{V^2}{2g}\right) d\forall + \int_{\forall} u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{V^2}{2g}\right) d\forall =$$

$$= \frac{d}{dt}\int_{\forall} \frac{V^2}{2g} d\forall + \int_{A} \frac{V^2}{2g} (u_j - w_j)\, n_j dA \qquad (3.22)$$

El primer término del segundo miembro tiene una estructura análoga al último del miembro anterior, por lo que su transformación resulta en

$$-\int_{\forall} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\gamma} + \zeta\right) d\forall = -\int_{A}\left(\frac{p}{\gamma} + \zeta\right) u_j n_j dA \qquad (3.23)$$

El segundo término, utilizando (3.10) y (3.8.a), se convierte en

$$\frac{1}{\gamma}\int_{\forall} u_i \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} d\forall = \frac{1}{\gamma}\int_{A} u_i \tau_{ji} n_j dA - \frac{1}{\gamma}\int_{\forall} \tau_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\forall \qquad (3.24)$$

Reemplazando las Ecuaciones (3.22) a (3.24) en la Ecuación (3.21) se obtiene la ecuación de la energía en su forma integral.

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall} \frac{V^2}{2g} d\forall + \int_{A} \frac{V^2}{2g} (u_j - w_j)\, n_j dA =$$

$$= -\int_{A}\left(\frac{p}{\gamma} + \zeta\right) u_j n_j dA + \frac{1}{\gamma}\int_{A} u_i \tau_{ji} n_j dA - \frac{1}{\gamma}\int_{\forall} \tau_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\forall \qquad (3.25)$$

El primer miembro de la Ecuación (3.25) representa la variación de la energía cinética contenida dentro del volumen $\forall$, más la pérdida por el flujo de energía cinética a través de su superficie (siempre salvo el factor γ^{-1}). De acuerdo a la Ecuación (3.20), el primer término del segundo miembro de la Ecuación (3.25) representa el trabajo efectivo de las presiones sobre la superficie A . Por su parte, el segundo término constituye el trabajo de las tensiones de deformación sobre esa misma superficie. No todo este trabajo contribuye al aumento de energía cinética; en efecto, una parte, denominada trabajo disipativo, produce una deformación pura de la masa fluida [1]. Precisamente, es el trabajo disipativo el que aparece restado al final de la Ecuación (3.25).

Un simple agregado a la Ecuación (3.25), conduce a una expresión cuya interpretación es quizás más directa. Teniendo en cuenta que $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$, y utilizando (3.9), se obtiene

$$0 = \int_{\forall} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \, d\forall$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{\forall} \zeta \, d\forall - \int_{\forall} \zeta \, w_j n_j dA \qquad (3.26)$$

Restando miembro a miembro las Ecuaciones (3.25) y (3.26) y reordenando, se llega a

$$\frac{d}{dt} \int_{\forall} \left(\frac{V^2}{2g} + \zeta \right) d\forall + \int_A \left(\frac{V^2}{2g} + \zeta \right) (u_j - w_j) \, n_j dA =$$

$$= - \int_A \frac{p}{\gamma} u_j n_j dA + \frac{1}{\gamma} \int_A u_i \tau_{ji} n_j dA - \frac{1}{\gamma} \int_{\forall} \tau_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \, d\forall \qquad (3.27)$$

La Ecuación (3.27) expresa que la variación de la energía mecánica (cinética más potencial) contenida dentro de $\forall$, más la pérdida por el flujo de energía mecánica a través de su superficie, es igual al trabajo de las fuerzas exteriores (excluida la gravedad) sobre esa superficie, menos la energía perdida por disipación.

3.2. *Ecuación de Continuidad*

La adaptación de las Ecuaciones (3.13), (3.19) y (3.25) a los problemas de escurrimiento en canales, se realiza adoptando un volumen $\delta\forall(t)$ análogo al utilizado en el tratamiento que se presenta en el capítulo anterior. Es decir, una "rodaja" transversal a la coordenada s del fondo en la dirección

del escurrimiento, de espesor infinitesimal δs, con las secciones transversales extremas fijas, y la superficie lateral en parte fija coincidiendo con el cauce, y en parte móvil coincidiendo con la superficie libre (Véase Figura 2.1.).

La velocidad w_j de los contornos de $\delta\forall$ satisface, entonces, las condiciones siguientes: la superficie libre puede ser pensada, eventualmente, como el área de contacto entre el escurrimiento y el fluido en precipitación (o en evaporación); sobre ella, la condición de contorno cinemática se expresa como

$$(u_j - w_j)\, n_j = -i_{sl}\, e_j^{sl}\, n_j \tag{3.28.a}$$

donde i_{sl} es la intensidad de precipitación ($i_{sl} < 0$ en el caso de evaporación) y e_j^{sl} el versor en su dirección de incidencia. Por su parte, en las superficies restantes se cumple que

$$w_j = 0 \tag{3.28.b}$$

Si bien la expresión general de la ecuación de continuidad ha sido deducida rigurosamente en el parágrafo 2.1., es útil reobtenerla a partir de la Ecuación (3.13)

$$\frac{d\forall}{dt} + \int_A (u_j - w_j)\, n_j\, dA = 0 \tag{3.13}$$

para ilustrar el procedimiento a utilizar con las Ecuaciones (3.19) y (3.25).

El primer término de la Ecuación (3.13) puede escribirse como

$$\frac{d\forall}{dt} \cong \delta s\, \frac{\partial\Omega}{\partial t} \tag{3.29}$$

donde la igualdad es válida a primer orden en δs, orden de aproximación que se conserva en lo que sigue.

En cuanto al término integral de la Ecuación (3.13), la aplicación de las Ecuaciones (3.28) resulta en

$$\int_A (u_j - w_j)\, n_j dA = \int_{\Omega(s+\delta s)} u_j n_j d\Omega + \int_{\Omega(s)} u_j n_j d\Omega - \\ - \int_{sup.libre} i_{sl} e^{sl} n_j dA + \int_{sup.cauce} u_j n_j dA \tag{3.30}$$

Se define el caudal $Q(s, t)$ a través de la sección transversal $\Omega(s, t)$ como

$$Q(s, t) \equiv \int_\Omega u_j e_j^s d\Omega = \int_\Omega u d\Omega \tag{3.31}$$

donde e_j^s es el versor en la dirección s. Utilizando (3.31), y teniendo en cuenta

que en las secciones $\Omega(s + \delta s)$ y $\Omega(s)$ vale $n_j = \pm e_j^s$, respectivamente, los dos primeros términos del segundo miembro de la Ecuación (3.30) se transforman en

$$\int_{\Omega(s+\delta s)} u_j n_j d\Omega + \int_{\Omega(s)} u_j n_j d\Omega = Q(s+\delta s, t) - Q(s,t) \cong \frac{\partial Q}{\partial s}\delta s \qquad (3.32)$$

Si se define la intensidad media de precipitación $\bar{i}_{sl}$ en una sección como

$$\bar{i}_{sl}(s,t) \equiv \frac{1}{\bar{B}} \int_{b=0}^{b=B} i_{sl} e_j^{sl} n_j \frac{db}{\cos\theta_{sl}} \qquad (3.33)$$

donde b es la coordenada transversal tangente a la superficie libre, $\theta_{sl}(b)$ el ángulo de inclinación de la normal a la superficie libre respecto del plano normal al eje s, y B la distancia horizontal entre orillas (Véase Figura 3.1.), el tercer término del segundo miembro de la Ecuación (3.30) se escribe como

$$-\int_{sup.libre} i_{sl} e_j^{sl} n_j dA \cong -\bar{i}_{sl}\bar{B}\delta s \qquad (3.34)$$

El último término de la Ecuación (3.30) puede ser descompuesto, eventualmente, en la suma de dos integrales; una sobre el cauce propiamente dicho, y otra sobre la superficie imaginaria que divide al flujo principal de un escurrimiento lateral, superficial o encauzado, tal cual se muestra en la Figura 3.1. Sobre el cauce propiamente dicho se cumple que

$$u_j n_j = i_{sc} e_j^{sc} n_j \qquad (3.35)$$

donde i_{sc} es la intensidad de infiltración (positiva si es una pérdida) y e_j^{sc} el versor en su dirección de incidencia, por lo cual el término en cuestión se transforma en

$$\int_{sup.cauce} u_j n_j dA = \int_{cauce\ prop.dicho} i_{sc} e_j^{sc} n_j dA + \int_{esc.lateral} u_j n_j dA \qquad (3.36)$$

Definiendo en cada sección la intensidad media de infiltración $\bar{i}_{sc}$, y el flujo entrante del escurrimiento lateral q_l por unidad de longitud, respectivamente, como

$$\bar{i}_{sc}(s,t) \equiv \frac{1}{\bar{B}} \int_{l=X_l}^{l=X} i_{sc} e_j^{sc} n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} \qquad (3.37)$$

$$q_l(s,t) \equiv -\int_{l=0}^{l=X_l} u_j n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} \qquad (3.38)$$

donde l, es la coordenada transversal tangente al cauce (Véase Figura 3.1.), y $\theta_{sc}(l)$ el ángulo de inclinación de la normal a la superficie del cauce respecto del plano normal al eje s, la Ecuación (3.36) se convierte en

$$\int_{\text{sup.cauce}} u_j\, n_j\, dA \cong (\overline{i_{sc}}\,\overline{B} - q_l)\,\delta s \tag{3.39}$$

Finalmente, reemplazando las Ecuaciones (3.32), (3.34) y (3.39) en la Ecuación (3.30), y ésta, junto con la Ecuación (3.29), en la Ecuación (3.13); dividiendo por δs ; tomando límite para $\delta s \to 0$, y reordenando, se obtiene la Ecuación de Continuidad para escurrimiento en canales

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = (\overline{i_{sl}} - \overline{i_{sc}})\,\overline{B} + q_l \tag{3.40}$$

La única diferencia entre las Ecuaciones (2.4) y (3.40) reside en que, en ésta última, el aporte lateral aparece desglosado en sus tres formas posibles de contribución

$$q = (\overline{i_{sc}} - \overline{i_{sl}})\,\overline{B} - q_l \tag{3.41}$$

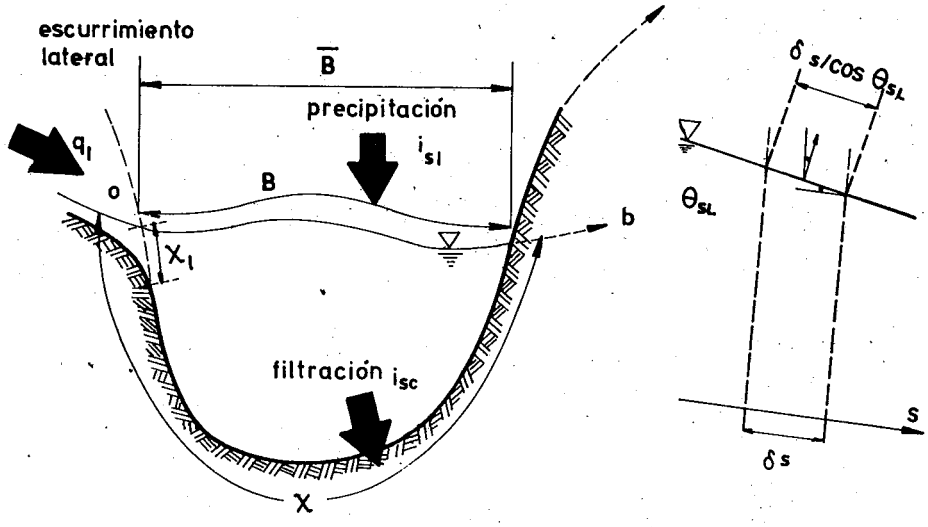


Figura 3.1. Aportes laterales

3.3. *Análisis de la Distribución de Presiones*

La componente en la dirección de la corriente de la ecuación integral de la cantidad de movimiento, Ecuación (3.19), da lugar a una de las ecuaciones unidimensionales básicas. En ella aparece un término de contribución de las presiones. Para su evaluación se requiere previamente analizar la distribución

de presiones en el seno del escurrimiento. Esto puede llevarse a cabo en base a la información suministrada por el balance de la cantidad de movimiento en las direcciones transversales al flujo, tal cual se muestra en lo que sigue.

Ante todo, es necesario definir un sistema de coordenadas. Sea un sistema localmente cartesiano en cada sección transversal (Véase Figura 3.2.); un eje s' tangente a s y en su mismo sentido; otro eje η sobre el plano vertical que contiene a s, y apuntando desde el fondo hacia la superficie libre; y un tercero ξ, formando una terna inversa con los anteriores. Donde se utilice notación tensorial, se hará la identificación $x_1 \equiv s'$, $x_2 \equiv \xi$, $x_3 \equiv \eta$. Además, dado que en el análisis del flujo en una sección transversal los ejes s y s' son indistinguibles, en adelante se hará referencia exclusivamente al eje s.

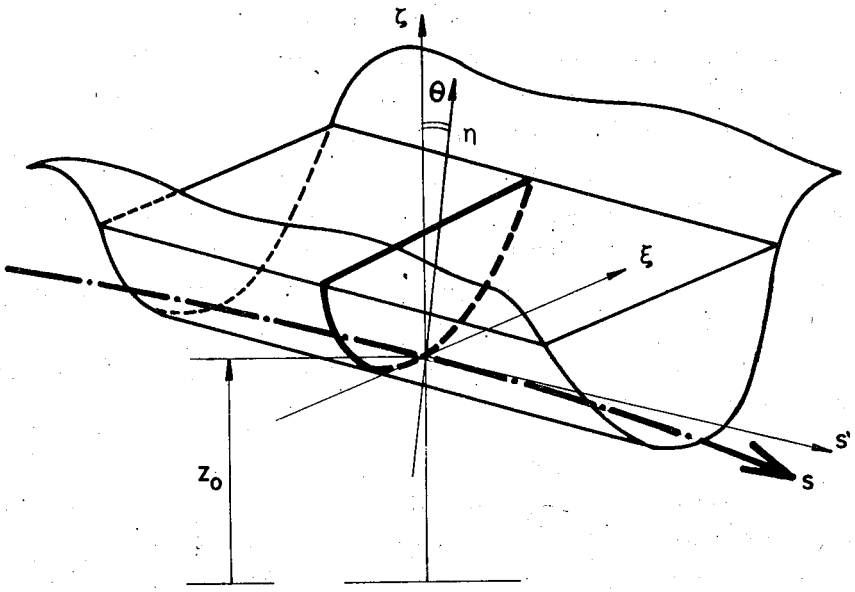


Figura 3.2. Sistema de Coordenadas local, en cada sección transversal

Las Ecuaciones (3.6) según η, ξ pueden escribirse, en una mezcla de notación tensorial y explícita, como

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{p}{\gamma} + \zeta\right) = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \tau_{j3}}{\partial x_j} - \left(\frac{1}{g}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{u_j}{g}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) \qquad (3.42.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{p}{\gamma}\right) = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \tau_{j2}}{\partial x_j} - \left(\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u_j}{g}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) \tag{3.42.b}$$

donde $v \equiv u_2$, $w \equiv u_3$ y, además, se ha tenido en cuenta que $\partial\zeta/\partial\xi = 0$. En el caso particular de flujo laminar, permanente y uniforme, las Ecuaciones (3.42) se reducen a

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{p}{\gamma} + \zeta\right) = 0 \tag{3.43.a}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{p}{\gamma}\right) = 0 \tag{3.43.b}$$

Estas ecuaciones admiten una integración directa. En efecto, considerando nulas las tensiones de deformación en la superficie libre [11], y teniendo en cuenta que

$$\zeta(s, \eta) = \eta\cos\theta + z_o \tag{3.44}$$

donde z_o (s) es la altura del fondo respecto de un plano horizontal de referencia, y θ(s) el ángulo de inclinación del eje s respecto de ese mismo plano (Véase Figura 3.3.), la Ecuación (3.43.a) resulta en

$$p(s, \eta, \xi, t) = \gamma(\eta_l - \eta)\cos\theta \tag{3.45}$$

donde η_l (s, ξ, t) es la coordenada η de la superficie libre. La Ecuación (3.45) constituye la ley de distribución hidrostática de presiones. Por su parte, la Ecuación (3.43.b) expresa que las líneas isobáricas (resultantes de la intersección de las superficies isobáricas y el plano transversal al escurrimiento en cada sección) son horizontales. En particular, la superficie libre (p = 0) está nivelada en cada sección transversal, es decir

$$\eta_l = \eta_l(s, t) \tag{3.46}$$

En el caso de flujo turbulento, permanente y uniforme sobre un cauce hidráulicamente liso, la presión es hidrostática sobre las paredes. No obstante, en principio, pueden producirse desviaciones en el seno de la corriente respecto de una ley hidrostática por la influencia de las tensiones de deformación.

En situaciones generales de escurrimiento con la turbulencia totalmente desarrollada (que son los casos en consideración), las tensiones viscosas son pequeñas frente a las de Reynolds. En estas condiciones Keulegan [8, 9] y Strelkoff [11] han realizado análisis acerca de la influencia de las tensiones de Reynolds sobre la distribución de presiones. De ellos y la experiencia [36,37, 38] surge que, en la práctica, esa influencia puede ser generalmente desprecia-

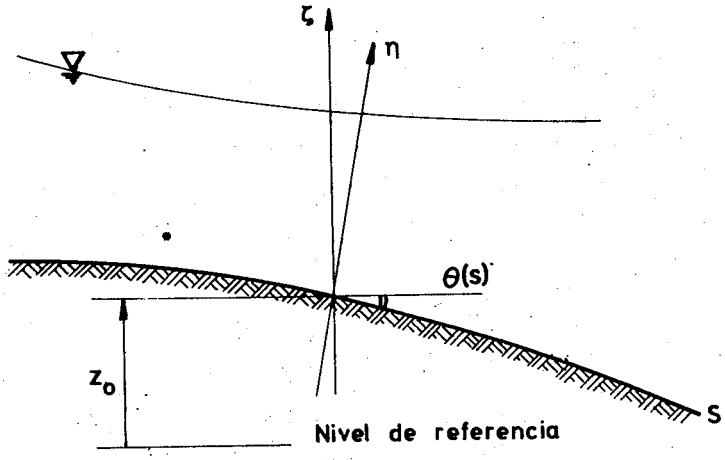


Figura 3.3. Magnitudes geométricas

da. Entonces, en los segundos miembros de las Ecuaciones (3.42), las principales contribuciones pueden provenir de las componentes transversales de la aceleración.

En base a todas estas consideraciones, puede tomarse como referencia el caso de flujo permanente y uniforme, cuya distribución de presiones viene dada por las Ecuaciones (3.45) y (3.46), y expresar formalmente la solución de la Ecuación (3.42) en un caso práctico general como

$$p\,(s, \eta, \xi, t) = \gamma\,(\eta_l - \eta)\cos\theta + p_D \qquad (3.47)$$

donde $p_D\ (s, \eta, \xi, t)$, en contraposición con el término que le antecede (de tipo "hidrostático"), puede denominarse "presión dinámica".

En las situaciones en que la componente de la aceleración según η sea pequeña frente a la aceleración de la gravedad, la Ecuación (3.42.a) puede reducirse en primera aproximación a la Ecuación (3.43.a); es decir, la distribución de presiones debe ser esencialmente hidrostática.

$$p_D \cong 0 \qquad (3.48)$$

y la Ecuación (3.47) se reduce a la Ecuación (3.45). Por su parte, en los casos en que las componentes de la aceleración según ξ sea pequeña frente a g, la Ecuación (3.42.b) puede aproximarse por la Ecuación (3.43.b); es decir. la superficie libre debe estar esencialmente nivelada en cada sección transversal; vale entonces la Ecuación (3.46), $\eta_l = \eta_l\ (s, t)$. Como en el caso general p_D

y η_l son incógnitas cuya determinación requiere tratamientos complementarios, es útil establecer un criterio práctico para reconocer las situaciones en las cuales se verifican aproximadamente las Ecuaciones (3.46) y (3.48). Esto es lo que se intenta esbozar en lo que resta de este punto, con el agregado de que también se obtiene un criterio práctico de determinación del grado de unidireccionalidad del flujo.

En primer lugar, considérese un escurrimiento permanente. Cada sección transversal al flujo puede pensarse como atravesada por una infinidad de líneas de corriente las cuales forman diversos ángulos con la normal al plano de dicha sección. Tanto la componente de la aceleración en la dirección de cada línea de corriente como la normal a ella contribuyen, entonces, a determinar las componentes de la aceleración transversales al escurrimiento (Véase Figura 3.4.).

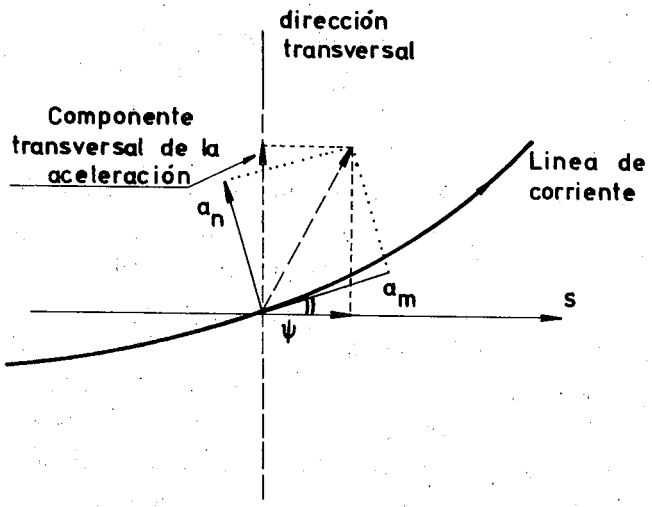


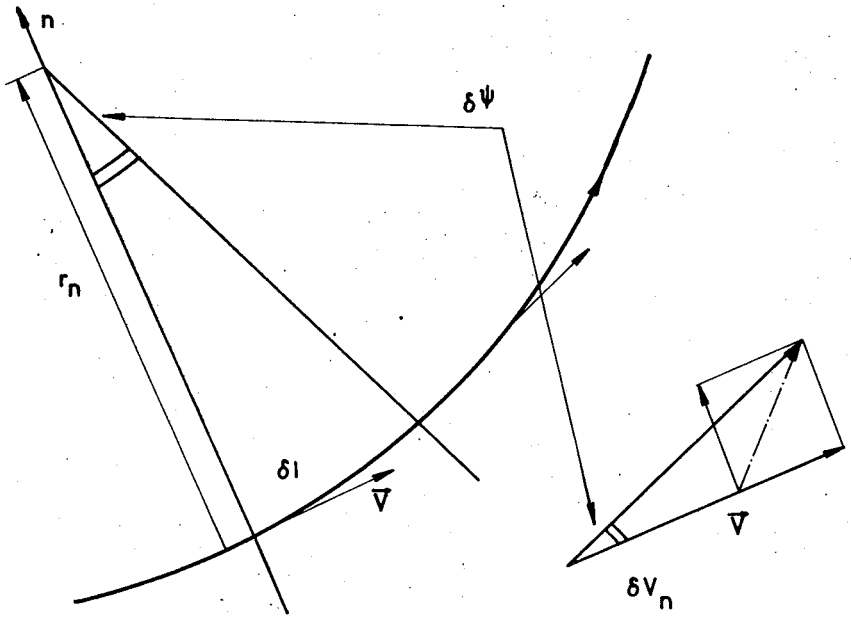
Figura 3.4. Contribuciones a la aceleración transversal

Sea n la coordenada normal (local) a una línea de corriente, que pasa por su centro de curvatura (local) y apunta hacia él. La componente a_n de la aceleración según ese eje puede expresarse como [39]

$$a_n = \frac{V^2}{r_n} \tag{3.49}$$

donde r_n es el radio de curvatura local (Véase Figura 3.5.). Sea m la coordenada longitudinal, es decir, tangente a la línea de corriente. Si a_m es la componente de la aceleración según m , y δV la variación de la velocidad a lo largo de un segmento δm de la línea de corriente, puede escribirse, en el límite cuando δm tiende a cero [39]

$$a_m = V \frac{\partial V}{\partial m} \tag{3.50}$$



$$\left| a_n \right| \approx \left| V \frac{\delta V_n}{\delta l} \right| \approx \left| V \frac{V}{r_n} \right|$$

Figura 3.5. Aceleración normal a una línea de corriente

Teniendo en cuenta que el escurrimiento es permanente, la descarga debe ser constante a través de un filamento de corriente de sección transversal elemental $\omega(m)$ que contiene a la línea de corriente en cuestión. Esto determina que, a primer orden en ω , valga (Véase Figura 3.6.)

$$\delta (V\omega) = V\delta\omega + \omega\delta V = 0 \tag{3.51}$$

donde $\delta\omega$ es la variación del área elemental ω a lo largo de δm. De la Ecuación (3.51) surge, en el límite cuando ω y δm tienden a cero, que

$$\frac{\partial V}{\partial m} = \frac{V}{r_m} \tag{3.52}$$

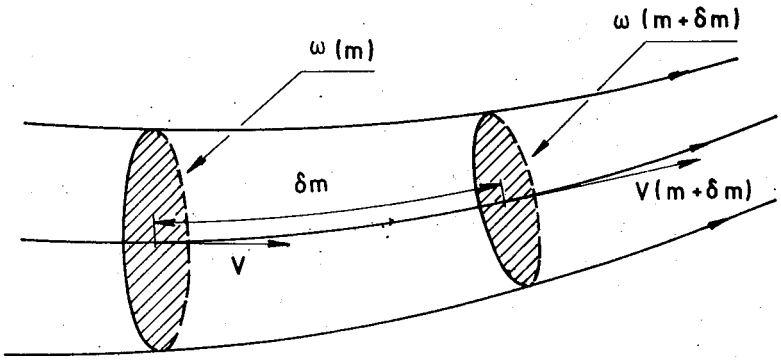
donde

$$\frac{1}{r_m} \equiv -\lim_{\omega \to 0}\left(\frac{1}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial m}\right) \tag{3.53}$$

es el valor local de la variación relativa, por unidad de longitud, de la sección transversal del filamento de corriente, y constituye una medida del grado de convergencia del flujo (si es negativo existe divergencia). Reemplazando la Ecuación (3.52) en la Ecuación (3.50) se obtiene

$$a_m = \frac{V^2}{r_m} \tag{3.54}$$

que es una expresión formalmente análoga a la Ecuación (3.49).



$$V(m + \delta m) = V(m) + \delta V$$

$$\omega(m + \delta m) = \omega(m) + \delta\omega$$

$$a_m = -\frac{V^2}{\omega}\frac{\delta\omega}{\delta m}$$

Figura 3.6. Aceleración transversal a una línea de corriente

De acuerdo a lo dicho, en cada punto de una sección transversal tanto a_n como a_m contribuirán a determinar las componentes transversales de la aceleración. Por simple inspección de las Ecuaciones (3.49) y (3.54) se observa entonces que esas componentes serán tanto menores cuanto más gran-

des sean r_n y r_m ; es decir, cuanto más chicas sean la curvatura y la convergencia de las líneas de corriente, aproximándose a una situación de flujo gradualmente variado.

Ahora bien, en el tratamiento unidimensional de un escurrimiento éste es considerado como un filamento de corriente. Esto significa que la escala de análisis es, en general, significativamente mayor que las dimensiones transversales del flujo. De ello se desprenden dos consecuencias. En primer lugar, sólo es necesario conocer la distribución de presiones con una resolución "gruesa" (más rigurosamente, sólo interesan las componentes de mayor longitud de onda de su espectro). En consecuencia, también puede ser "gruesa" la escala de resolución de las componentes transversales de la aceleración. En segundo lugar, es posible definir una magnitud representativa del grado de convergencia del escurrimiento en cada sección en analogía con la Ecuación (3.53), es decir

$$\frac{1}{R_m} \equiv -\frac{1}{\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial s} \tag{3.55}$$

De acuerdo a la Ecuación (3.55) $|R_m|$ puede interpretarse como el orden de magnitud de la distancia a lo largo de la corriente sobre la cual se producen variaciones significativas de sus características, por lo cual se lo denominará "radio de variación". En general, la escala de análisis debe ser, a lo sumo, del mismo orden que el radio de variación.

En base a estas consideraciones pueden establecerse las siguientes conclusiones. Sea L una distancia transversal típica en la zona de estudio. Para que el escurrimiento sea esencialmente unidireccional, y en consecuencia el análisis unidimensional sea significativo, debe verificarse que $|R_m| \gg L$. En estos casos, adoptando una escala de resolución gruesa según las secciones transversales, la componente transversal de la aceleración en cada punto puede considerarse igual a la componente normal a la línea de corriente que pasa por ese punto. Es decir que viene dada, directamente por la Ecuación (3.49). Entonces, las Ecuaciones (3.46) y (3.48) han de verificarse tanto mejor cuanto menor sea la curvatura. Es decir, si R_n es un radio de curvatura típico en la zona de estudio, cuando $R_n \gg L$.

Si esta última condición no se verifica en la proporción requerida, pueden realizarse correcciones "a primer orden" para p_D y η_l , tal cual mues-

tran Ven Te Chow [5, pág. 31] y Henderson [17, pág. 251].

Considérese ahora un escurrimiento impermanente. El concepto de radio de variación, definido por la Ecuación (3.55), constituye aún en este caso un criterio adecuado para medir instantáneamente la convergencia del flujo. Entonces, si en cada instante se verifica que $|R_m| \gg L$, el escurrimiento es cuasi-paralelo y el análisis unidimensional significativo. Es más, la componente transversal de la aceleración coincide esencialmente con la componente normal a la línea de corriente, la cual puede expresarse, teniendo en cuenta la parte local y la convectiva (Ecuación (3.49)), como

$$a_n = \frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{V^2}{r_n} \tag{3.56}$$

donde u_n es la componente normal de la velocidad (que en el instante t es nula). Entonces, para que puedan considerarse válidas las Ecuaciones (3.46) y (3.48) no sólo debe verificarse que $R_n \gg L$, sino también que $t_o \gg U_o/g$, donde t_o es un tiempo típico de variación y U_o una velocidad típica de flujo.

3.4. *Ecuación de la Cantidad de Movimiento*

La Ecuación (3.19) para la coordenada s puede escribirse como

$$\frac{1}{g}\frac{d}{dt}\int_{\forall} u d\forall + \frac{1}{g}\int_A u\,(u_j - w_j)\,n_j dA =$$

$$= -\int_A \left(\frac{p}{\gamma} + \zeta - \frac{\tau_{ss}}{\gamma}\right) n_s dA + \frac{1}{\gamma}\int_A (\tau_{\xi s} n_\xi + \tau_{\eta s} n_\eta)\, dA \tag{3.57}$$

Si se elige como volumen de integración la "rodaja" δV definida en el parágrafo 3.2. pueden realizarse las siguientes transformaciones, válidas a primer orden en δs.

El primer término del primer miembro de la Ecuación (3.57) se convierte en

$$\frac{1}{g}\frac{d}{dt}\int_{\forall} u d\forall \cong \frac{\delta s}{g}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega(s)} u d\Omega \tag{3.58}$$

donde el reemplazo del signo de derivación total por parcial respecto del tiempo se hace a los efectos de explicitar que s se mantiene constante. De acuerdo a (3.31) y a la Ecuación (2.7), la Ecuación (3.58) se escribe

$$\frac{1}{g}\frac{d}{dt}\int_{\forall} u d\forall \cong \frac{\delta s}{g}\frac{\partial}{\partial t}(\Omega U)$$

$$\cong \frac{\delta s}{g}\left(\Omega\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right) \tag{3.59}$$

El segundo término de la Ecuación (3.57), utilizando las Ecuaciones (3.28) y (3.35), se transforma en

$$\frac{1}{g}\int_A u\,(u_j - w_j)\,n_j dA \cong \frac{1}{g}\int_{\Omega(s+\delta s)} u^2 d\Omega - \frac{1}{g}\int_{\Omega(s)} u^2 d\Omega - \frac{\delta s}{g}\int_{\text{sup.libre}} u i_{sl} e_j^{sl} n_j \frac{db}{\cos\theta_{sl}} +$$

$$+ \frac{\delta s}{g}\int_{\text{cauce prop.dicho}} u i_{sc} e_j^{sc} n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} + \frac{\delta s}{g}\int_{\text{esc.lateral}} u u_j n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} \tag{3.60}$$

Los dos primeros términos del segundo miembro de la Ecuación (3.60) dan

$$\frac{1}{g}\int_{\Omega(s+\delta s)} u^2 d\Omega - \frac{1}{g}\int_{\Omega(s)} u^2 d\Omega \cong \frac{\delta s}{g}\frac{\partial}{\partial s}\int_{\Omega(s)} u^2 d\Omega \tag{3.61}$$

Se define el coeficiente β de distribución de velocidades, o coeficiente de Boussinesq, como

$$\beta(s,t) \equiv \frac{1}{U^2\Omega}\int_{\Omega} u^2 d\Omega \tag{3.62}$$

Este coeficiente es unitario si la distribución de velocidades en cada sección es uniforme.

Utilizando (3.62), la Ecuación (3.61) se convierte en

$$\frac{1}{g}\int_{\Omega(s+\delta s)} u^2 d\Omega - \frac{1}{g}\int_{\Omega(s)} u^2 d\Omega \cong \frac{\delta s}{g}\frac{\partial}{\partial s}(\beta Q U)$$

$$\cong \frac{\delta s}{g}\left\{\beta U\frac{\partial Q}{\partial s} + \Omega\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\beta\frac{U^2}{2}\right) + \frac{U^2}{2}\frac{\partial \beta}{\partial s}\right]\right\} \tag{3.63}$$

Se definen las velocidades medias de los aportes laterales en la dirección del escurrimiento, de la siguiente manera

$$\bar{u}_{sl} \equiv \frac{1}{\bar{i}_{sl}\bar{B}}\int_{\text{sup.libre}} u i_{sl} e_j^{sl} n_j \frac{db}{\cos\theta_{sl}} \tag{3.64.a}$$

$$\bar{u}_{sc} \equiv \frac{1}{\bar{i}_{sc}\bar{B}}\int_{\text{cauce prop.dicho}} u i_{sc} e_j^{sc} n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} \tag{3.64.b}$$

$$\bar{u}_L \equiv -\frac{1}{q_L}\int_{\text{esc.lateral}} u u_j n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} \tag{3.64.c}$$

Reemplazando en la Ecuación (3.60), de acuerdo a la Ecuación (3.63) y a las definiciones (3.64), se obtiene

$$\frac{1}{g}\int_A u\,(u_j - w_j)\,n_j dA \cong \frac{\delta s}{g}\left[\beta U \frac{\partial Q}{\partial s} + \Omega \frac{\partial}{\partial s}\left(\beta \frac{U^2}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\Omega U^2}{2}\frac{\partial \beta}{\partial s} + \overline{u}_{sc}\overline{i}_{sc}\overline{B} - \overline{u}_{sL}\overline{i}_{sL}\overline{B} - \overline{u}_L q_L\right] \tag{3.65}$$

El primer término del segundo miembro de la Ecuación (3.57) puede transformarse, aplicando (3.8.b), en

$$-\int_A\left(\frac{p}{\gamma} + \zeta - \frac{\tau_{ss}}{\gamma}\right) n_s dA = -\int_{\forall} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{p}{\gamma} + \zeta - \frac{\tau_{ss}}{\gamma}\right) d\forall$$

$$\cong -\delta s \int_\Omega \frac{\partial}{\partial s}\left(\eta_l \cos\theta + z_o + \frac{p_D}{\gamma} - \frac{\tau_{ss}}{\gamma}\right) d\Omega \tag{3.66}$$

donde, en la última igualdad, se han reemplazado las Ecuaciones (3.45) y (3.44).

Puede definirse la "profundidad medía de flujo" h como

$$h\,(s,t) \equiv \frac{1}{\Omega}\int_\Omega \eta_l\, d\Omega \tag{3.67}$$

A su vez, a partir de (3.67) puede definirse en forma implícita un coeficiente K (s, t) de distribución de presiones, a través de la relación

$$\frac{\partial}{\partial s}\,(Kh\cos\theta) \equiv \frac{1}{\Omega}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial s}\,(\eta_l \cos\theta)\, d\Omega \tag{3.68}$$

Este coeficiente es unitario si la aceleración transversal según ξ es despreciable, pues en ese caso se verifica la Ecuación (3.46).

También pueden definirse implícitamente un valor medio $\langle p_D \rangle$ de la "presión dinámica", y otro $\langle \tau_{ss} \rangle$ de la tensión de deformación normal en la dirección del escurrimiento, como

$$\frac{\partial}{\partial s}\langle p_D \rangle \equiv \frac{1}{\Omega}\int_\Omega \frac{\partial p_D}{\partial s}\, d\Omega \tag{3.69}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\langle \tau_{ss} \rangle \equiv \frac{1}{\Omega}\int_\Omega \frac{\partial \tau_{ss}}{\partial s}\, d\Omega \tag{3.70}$$

Si la aceleración transversal según η es despreciable, se cumple la Ecuación (3.48), por lo cual $\langle p_d \rangle = 0$.

Reemplazando (3.68), (3.69) y (3.70) en la Ecuación (3.66), y utilizando la definición (2.14) de pendiente de fondo I_o , se obtiene

$$-\int_A \left(\frac{p}{\gamma} + \zeta - \frac{\tau_{ss}}{\gamma}\right) n_s dA \cong \Omega\delta s \left[-\frac{\partial}{\partial s}(Kh\cos\theta) + \right.$$

$$\left. + I_o - \frac{\partial}{\partial s}\langle p_D\rangle + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial s}\langle\tau_{ss}\rangle \right] \tag{3.71}$$

Finalmente, la última integral de la Ecuación (3.57) se anula sobre las secciones transversales extremas de δV, donde $n_j = \pm e_j^s$, y también sobre la superficie libre, donde se supuso que se anulaban las tensiones de deformación. Sólo contribuye, entonces, la superficie del cauce (incluido el cauce imaginario que separa el escurrimiento principal y lateral); es decir

$$\frac{1}{\gamma}\int_A (\tau_{\xi s} n_\xi + \tau_{\eta s} n_\eta)\, dA \cong \frac{\delta s}{\gamma}\int_{\text{sup.cauce}} (\tau_{\xi s} n_\xi + \tau_{\eta s} n_\eta)\, \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} \tag{3.72}$$

Se define el valor medio en una sección de la tensión de corte sobre la superficie del cauce, en la dirección s, como

$$\tau_o \equiv -\frac{1}{\chi}\int_{\text{sup.cauce}} (\tau_{\xi s} n_\xi + \tau_{\eta s} n_\eta)\, \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} \tag{3.73}$$

donde el signo menos proviene del hecho de que n_j es la normal exterior a δV. Utilizando (3.73), la Ecuación (3.72) se transforma en

$$\frac{1}{\gamma}\int_A (\tau_{\xi s} n_\xi + \tau_{\eta s} n_\eta)\, dA \cong -\frac{\delta s}{\gamma}\tau_o \chi \tag{3.74}$$

Reemplazando término a término de la Ecuación (3.57), de acuerdo a las Ecuaciones (3.59), (3.65), (3.71) y (3.74); dividiendo por $\Omega\delta s$; tomando el límite para $\delta s \to 0$, y reordenando, se obtiene la expresión general de la Ecuación de la Cantidad de Movimiento

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial s}\left(\beta\frac{U^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial s}(Kh\cos\theta) - I_o + \frac{\tau_o}{\gamma R} = \frac{1}{g\Omega}\left[-\beta U\frac{\partial Q}{\partial s} - U\frac{\partial\Omega}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \overline{u_{sL}}\,\overline{i_{sL}}\,\bar{B} - \overline{u_{sc}}\,\overline{i_{sc}}\,\bar{B} + \overline{u_L} q_L \right] - \frac{U^2}{2g}\frac{\partial\beta}{\partial s} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial s}\langle\tau_{ss}\rangle - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial s}\langle p_D\rangle \tag{3.75}$$

donde R es el radio hidráulico. Restando miembro a miembro las Ecuaciones (3.75) y (3.40) de Continuidad, esta última multiplicada previamente por $\left(\frac{U^2}{2g} + h\cos\theta + z_o\right)$, se obtiene

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\beta\frac{U^2}{2g} + kh\cos\theta\right) - I_o + I_f = \frac{1}{g\Omega}\left[\overline{i_{sc}}\,\bar{B}(U - \bar{u}_{sc}) - \overline{i_{sL}}\,\bar{B}(U - \overline{u_{sL}}) - \right.$$

$$-q_L(U-\overline{u_L})-(\beta-1)\,U\,\frac{\partial Q}{\partial s}\Bigg] - \frac{U^2}{2g}\frac{\partial\beta}{\partial s} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial s}\langle\tau_{ss}\rangle - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial s}\langle p_D\rangle \tag{3.76}$$

donde se ha introducido la definición (2.32) de pendiente de fricción.

Si el escurrimiento es unidireccional, y la distribución de velocidades en cada sección transversal es uniforme ($\beta = 1$) ; si la distribución de presiones es hidrostática ($p_D = 0$) , y la superficie libre está nivelada en cada sección ($K = 1$) ; si la pendiente del fondo es pequeña ($\cos\theta \cong 1$) , y los gradientes de las tensiones medias normales de deformación (contribución no disipativa de la turbulencia) son despreciables frente a los gradientes de presiones, la Ecuación (3.76) se reduce a

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g}\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial s} - I_o + I_f =$$

$$= \frac{1}{g\Omega}\left[\overline{i_{sc}}\,\overline{B}(U-\overline{u_{sc}}) - \overline{i_{sL}}\,\overline{B}(U-\overline{u_{sL}}) - q_L(U-\overline{u_L})\right] \tag{3.77}$$

que sólo difiere de la Ecuación (2.33) por el hecho de haber considerado tres tipos distintos de aporte lateral.

3.5. *Ecuación de la Energía*

La Ecuación (3.25)

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall}\frac{V^2}{2g}\,d\forall + \int_A \frac{V^2}{2g}\,(u_j - w_j)\,n_j dA =$$

$$= -\int_A\left(\frac{p}{\gamma}+\zeta\right)u_j n_j dA + \frac{1}{\gamma}\int_A u_i\tau_{ji}n_j dA - \frac{1}{\gamma}\int_{\forall}\tau_{ji}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,d\forall \tag{3.25}$$

puede trabajarse de manera análoga a lo realizado con la Ecuación de la Cantidad de Movimiento.

El primer término del primer miembro puede escribirse como

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall}\frac{V^2}{2g}\,d\forall \cong \frac{\delta s}{2g}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}V^2 d\Omega \tag{3.78}$$

Se define el coeficiente β_o de distribución de velocidades como

$$\beta_o(s,t) \equiv \frac{1}{U^2\Omega}\int_{\Omega}V^2 d\Omega \tag{3.79}$$

Este coeficiente coincide con β en todas las secciones donde el escurrimiento es unidireccional.

Utilizando (3.79), la Ecuación (3.78) se convierte en

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall}\frac{V^2}{2g}\,d\forall \cong \frac{\delta s}{2g}\frac{\partial}{\partial t}(\beta_o\Omega U^2)$$

$$\cong \frac{\delta s}{g}\,Q\left[\beta_o\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{U}{2}\left(\frac{\partial\beta_o}{\partial t}+\frac{\beta_o}{\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)\right]. \tag{3.80}$$

La transformación del segundo término de la Ecuación (3.25) es análoga a la del término respectivo en la Ecuación (3.57). Entonces

$$\int_A \frac{V^2}{2g}(u_j-w_j)\,n_j dA \cong \frac{\delta s}{2g}\left(\frac{\partial}{\partial s}\int_\Omega V^2 u\,d\Omega - \int_{\text{sup.libre}} V^2 i_{sL} e_j^{sL} n_j \frac{db}{\cos\theta_{sL}} + \right.$$

$$\left. + \int_{\text{cauce prop.dicho}} V^2 i_{sc} e_j^{sc} n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} + \int_{\text{esc.lateral}} V^2 u_j n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}}\right) \tag{3.81}$$

Se define el coeficiente α de distribución de velocidades, o coeficiente de Coriolis, como

$$\alpha(s,t) \equiv \frac{1}{U^3\Omega}\int_\Omega V^2 u\,d\Omega \tag{3.82}$$

Este coeficiente es unitario en todas las secciones donde el escurrimiento es unidireccional y la distribución de velocidades uniforme.

Se definen, además, las velocidades cuadráticas medias de los aportes laterales, de la siguiente manera

$$\overline{V_{sL}} \equiv \left(\frac{1}{\overline{i_{sL}}\,\overline{B}}\int_{\text{sup.libre}} V^2 i_{sL} e_j^{sL} n_j \frac{db}{\cos\theta_{sL}}\right)^{1/2} \tag{3.83}$$

$$\overline{V_{sc}} \equiv \left(\frac{1}{\overline{i_{sc}}\,\overline{B}}\int_{\text{cauce prop.dicho}} V^2 i_{sc} e_j^{sc} n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}}\right)^{1/2} \tag{3.84}$$

$$\overline{V_L} \equiv \left(-\frac{1}{q_L}\int_{\text{esc.lateral}} V^2 u_j n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}}\right)^{1/2} \tag{3.85}$$

Reemplazando (3.82), (3.83), (3.84) y (3.85) en la Ecuación (3.81) se obtiene

$$\int_A \frac{V^2}{2g}(u_j-w_j)\,n_j dA \cong \frac{\delta s}{2g}\left[\alpha U^2\frac{\partial Q}{\partial s} + Q\frac{\partial}{\partial s}(\alpha U^2) + \right.$$

$$\left. + \overline{V_{sc}^2}\,\overline{i_{sc}}\,\overline{B} - \overline{V_{sL}^2}\,\overline{i_{sL}}\,\overline{B} - \overline{V_L^2}\,q_L\right] \tag{3.86}$$

El primer término del segundo miembro de la Ecuación (3.25) puede escribirse como

$$-\int_A \left(\frac{p}{\gamma}+\zeta\right) u_j n_j dA \cong -\delta s \left[\frac{\partial}{\partial s} \int_\Omega \left(\eta_l \cos\theta + z_o + \frac{p_D}{\gamma}\right) u d\Omega + \right.$$

$$+\int_{\text{sup.libre}} \left(\eta_l \cos\theta + z_o + \frac{p_D}{\gamma}\right) u_j n_j \frac{db}{\cos\theta_{sL}} + \int_{\text{cauce prop.dicho}} \left(\eta_l \cos\theta + z_o + \frac{p_D}{\gamma}\right) u_j n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} +$$

$$\left. +\int_{\text{esc.lateral}} \left(\eta_l \cos\theta + z_o + \frac{p_D}{\gamma}\right) u_j n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} \right] \tag{3.87}$$

donde se han utilizado las Ecuaciones (3.45) y (3.44).

Se define el coeficiente K_1 de distribución de presiones como

$$K_1(s,t) \equiv \frac{1}{hQ} \int_\Omega \eta_l u \, d\Omega \tag{3.88}$$

Este coeficiente es unitario si la aceleración transversal según ξ es despreciable. Se define, además un valor medio $\langle p_D \rangle_1$ de la "presión dinámica".como

$$\langle p_D \rangle_1 \equiv \frac{1}{Q} \int_\Omega p_D u \, d\Omega \tag{3.89}$$

Este valor medio es nulo si la aceleración transversal según η es despreciable. Con las definiciones (3.88) y (3.89) el primer término del corchete de la Ecuación (3.87) se transforma en

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_\Omega \left(\eta_l \cos\theta + z_o + \frac{p_D}{\gamma}\right) u \, d\Omega = \frac{\partial}{\partial s}\left[\left(K_1 h \cos\theta + z_o + \frac{\langle p_D \rangle_1}{\gamma}\right) Q\right]$$

$$= Q\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(K_1 h \cos\theta + \frac{\langle p_D \rangle_1}{\gamma}\right) - I_o\right] + \left(K_1 h \cos\theta + z_o + \frac{\langle p_D \rangle_1}{\gamma}\right)\frac{\partial Q}{\partial s} \tag{3.90}$$

El segundo término del corchete en la Ecuación (3.87) puede escribirse, de acuerdo a la Ecuación (3.28.a), como

$$\int_{\text{sup.libre}} \left(\eta_l \cos\theta + z_o + \frac{p_D}{\gamma}\right) u_j n_j \frac{db}{\cos\theta_{sL}} = \int_{\text{sup.libre}} \left(\eta_l \cos\theta + z_o + \frac{p_D}{\gamma}\right) w_j n_j \frac{db}{\cos\theta_{sL}} -$$

$$-\int_{\text{sup.libre}} \left(\eta_l \cos\theta + z_o + \frac{p_D}{\gamma}\right) i_{sL} e_j^{sL} n_j \frac{db}{\cos\theta_{sL}} \tag{3.91}$$

Reconociendo que

$$\int_{\text{sup.libre}} w_j n_j \frac{db}{\cos\theta_{sL}} = \frac{\partial \Omega}{\partial t} \tag{3.92}$$

pueden definirse los coeficientes K_2 y K_3 de distribución de presiones como

$$K_2(s,t) \equiv \frac{1}{h\,\partial\Omega/\partial t}\int_{\text{sup.libre}} \eta_l\, w_j n_j \frac{db}{\cos\theta_{sL}} \tag{3.93}$$

$$K_3(s,t) \equiv \frac{1}{h\,\bar{i}_{sL}\bar{B}}\int_{\text{sup.libre}} \eta_l\, i_{sL} e_j^{sL} n_j \frac{db}{\cos\theta_{sL}} \tag{3.94}$$

los cuales son unitarios si la aceleración transversal según ζ es despreciable. Además, pueden definirse los valores medios $\langle p_D \rangle_2$ y $\langle p_D \rangle_3$ de la "presión dinámica" como

$$\langle p_D \rangle_2 \equiv \frac{1}{\partial\Omega/\partial t}\int_{\text{sup.libre}} p_D w_j n_j \frac{db}{\cos\theta_{sL}} \tag{3.95}$$

$$\langle p_D \rangle_3 \equiv \frac{1}{\bar{i}_{sL}\bar{B}}\int_{\text{sup.libre}} p_D i_{sL} e_j^{sL} n_j \frac{db}{\cos\theta_{sL}} \tag{3.96}$$

que se anulan si la aceleración transversal según η es despreciable. Utilizando las definiciones (3.93) a (3.96), la Ecuación (3.91) se transforma en

$$\int_{\text{sup.libre}}\left(\eta_l \cos\theta + z_o + \frac{p_D}{\gamma}\right) u_j n_j \frac{db}{\cos\theta_{sL}} = \left(K_2\, h\cos\theta + z_o + \frac{\langle p_D \rangle_2}{\gamma}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial t} -$$

$$-\left(K_3\, h\cos\theta + z_o + \frac{\langle p_D \rangle_3}{\gamma}\right)\bar{i}_{sL}\bar{B} \tag{3.97}$$

Análogas consideraciones admiten los dos últimos términos del corchete en la Ecuación (3.87). Se definen los coeficientes K_4 y K_5 de distribución de presiones como

$$K_4(s,t) \equiv \frac{1}{h\,\bar{i}_{sc}\bar{B}}\int_{\text{cauce prop.dicho}} \eta_l\, i_{sc} e_j^{sc} n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} \tag{3.98}$$

$$K_5(s,t) \equiv -\frac{1}{h\,q_L}\int_{\text{esc.lateral}} \eta_l\, u_j n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} \tag{3.99}$$

que son unitarios si $\eta_l = h$ en el respectivo dominio de integración. Se definen, además, los valores medios $\langle p_D \rangle_4$ y $\langle p_D \rangle_5$ de la "presión dinámica" como

$$\langle p_D \rangle_4 \equiv \frac{1}{\bar{i}_{sc}\bar{B}}\int_{\text{cauce prop.dicho}} p_D i_{sc} e_j^{sc} n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} \tag{3.100}$$

$$\langle p_D \rangle_5 \equiv -\frac{1}{q_L}\int_{\text{esc.lateral}} p_D u_j n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} \tag{3.101}$$

que se anulan si la distribución de presiones es hidrostática en el respectivo dominio de integración. Utilizando la Ecuación (3.35) y las definiciones (3.98) y (3.100), el tercer término del corchete en la Ecuación (3.87) se transforma en

$$\int_{\text{cauce prop.dicho}} \left(\eta_l \cos\theta + z_o + \frac{p_D}{\gamma}\right) u_j n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} = \left(K_4 h \cos\theta + z_o + \frac{\langle p_D \rangle_4}{\gamma}\right) \overline{i}_{sc}\overline{B} \qquad (3.102)$$

mientras que el último término del corchete, con las definiciones (3.99) y (3.101), se convierte en

$$\int_{\text{esc.lateral}} \left(\eta_l \cos\theta + z_o + \frac{p_D}{\gamma}\right) u_j n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} = -\left(K_5 h \cos\theta + z_o + \frac{\langle p_D \rangle_5}{\gamma}\right) q_L \qquad (3.103)$$

Reemplazando las Ecuaciones (3.90), (3.97), (3.102) y (3.103) en la Ecuación (3.87) se obtiene

$$\begin{aligned} -\int_A \left(\frac{p}{\gamma} + \zeta\right) u_j n_j dA \cong \delta s \Bigg\{ & Q\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(K_1 h \cos\theta + \frac{\langle p_D \rangle_1}{\gamma}\right) - i_o\right] + \\ & + \left(K_1 h \cos\theta + z_o + \frac{\langle p_D \rangle_1}{\gamma}\right)\frac{\partial Q}{\partial s} + \left(K_2 h \cos\theta + z_o + \frac{\langle p_D \rangle_2}{\gamma}\right)\frac{\partial \Omega}{\partial t} - \\ & - \left(K_3 h \cos\theta + z_o + \frac{\langle p_D \rangle_3}{\gamma}\right)\overline{i}_{sL}\overline{B} + \left(K_4 h \cos\theta + z_o + \frac{\langle p_D \rangle_4}{\gamma}\right)\overline{i}_{sc}\overline{B} - \\ & - \left(K_5 h \cos\theta + z_o + \frac{\langle p_D \rangle_5}{\gamma}\right) q_L \Bigg\} \end{aligned} \qquad (3.104)$$

El segundo término del segundo miembro de la Ecuación (3.25), puede escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma}\int_A u_l \tau_{jl} n_j dA \cong \frac{\delta s}{\gamma}\Bigg(& \frac{\partial}{\partial s}\int_\Omega u_l \tau_{sl} d\Omega + \int_{\text{sup.libre}} u_l \tau_{jl} n_j \frac{db}{\cos\theta_{sL}} + \\ & + \int_{\text{cauce prop.dicho}} u_l \tau_{jl} n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} + \int_{\text{esc.lateral}} u_l \tau_{jl} n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}}\Bigg) \end{aligned} \qquad (3.105)$$

El primer término del paréntesis en la Ecuación (3.105) puede descomponerse en

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_\Omega u_l \tau_{sl} d\Omega = \frac{\partial}{\partial s}\left[\int_\Omega u \tau_{ss} d\Omega + \int_\Omega (v\tau_{s\xi} + w\tau_{s\eta}) d\Omega\right] \qquad (3.106)$$

Pueden definirse un valor medio $\overline{\tau}_{ss}$ de la tensión de deformación normal en la dirección del escurrimiento, y otro $\overline{W}$ del trabajo de las tensiones de corte sobre la sección Ω, en la siguiente forma

$$\overline{\tau_{ss}}(s, t) \equiv \frac{1}{Q} \int_{\Omega} \tau_{ss} u d\Omega \tag{3.107}$$

$$\overline{W}(s, t) \equiv \int_{\Omega} (v\tau_{s\xi} + w\tau_{s\eta}) d\Omega \tag{3.108}$$

Utilizando (3.107) y (3.108), la Ecuación (3.106) se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_{\Omega} u_l \tau_{sl} d\Omega = \frac{\partial}{\partial s} (Q\overline{\tau_{ss}} + \overline{W})$$

$$= Q \frac{\partial \overline{\tau_{ss}}}{\partial s} + \overline{\tau_{ss}} \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial s} \tag{3.109}$$

El segundo término del paréntesis en la Ecuación (3.105) se anula, por haberse considerado nulas las tensiones de deformación en la superficie libre. El tercer término puede transformarse convenientemente si se rota localmente el sistema de ejes coordenados, de forma tal que uno de ellos, n, coincida con la dirección de la normal n_j. En tal caso, puede escribirse como

$$\int_{\text{cauce prop.dicho}} u_l \tau_{jl} n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} = \int_{\text{cauce prop.dicho}} u_n \tau_{nn} \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} + \int_{\text{cauce prop.dicho}} (u_l \tau_{nl})_{l \neq n} \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} \tag{3.110}$$

Se pueden definir un valor medio $\overline{\tau_{nn}}$ de la tensión de deformación normal en la dirección n_j, y otro $\overline{W_n}$ del trabajo de las tensiones de corte sobre el cauce, de la siguiente manera

$$\overline{\tau_{nn}}(s, t) \equiv \frac{1}{\overline{i_{sc}}\,\overline{B}} \int_{\text{cauce prop.dicho}} \tau_{nn} i_{sc} e^{sc}_j n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} \tag{3.111}$$

$$\frac{\partial \overline{W_n}}{\partial s}(s, t) \equiv \int_{\text{cauce prop.dicho}} (u_l \tau_{nl})_{l \neq n} \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} \tag{3.112}$$

Utilizando (3.111) y (3.112), la Ecuación (3.110) se convierte en

$$\int_{\text{cauce prop.dicho}} u_l \tau_{jl} n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} = \overline{\tau_{nn}}\,\overline{i_{sc}}\,\overline{B} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial s} \tag{3.113}$$

El último término del paréntesis en la Ecuación (3.105) admite una transformación análoga al anterior, si también se procede a una rotación local del sistema de ejes hasta que uno de ellos, m, coincida con la dirección de n_j. Definiendo, entonces un valor medio $\overline{\tau_{mm}}$ de la tensión de deformación normal en la dirección de n_j, y otro $\overline{W_m}$ del trabajo de las ten-

siones de corte sobre el cauce imaginario que separa el escurrimiento principal y el lateral, de acuerdo a las relaciones

$$\overline{\tau_{mm}}\,(s,t) \equiv -\frac{1}{q_L}\int_{esc.lateral} \tau_{mm}u_m \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} \tag{3.114}$$

$$\frac{\partial \overline{W}_m}{\partial s}\,(s,t) \equiv \int_{esc.lateral} (u_l\tau_{ml})_{l\neq m} \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} \tag{3.115}$$

el término en cuestión puede escribirse como

$$\int_{esc.lateral} u_i\tau_{jl}n_j \frac{dl}{\cos\theta_{sc}} = -\overline{\tau_{mm}}q_L + \frac{\partial \overline{W}_m}{\partial s} \tag{3.116}$$

Reemplazando en la Ecuación (3.105), de acuerdo a las Ecuaciones (3.109), (3.113) y (3.116), se obtiene

$$\frac{1}{\gamma}\int_A u_l\tau_{jl}n_j dA \cong \frac{\delta s}{\gamma}\left(Q\frac{\partial\overline{\tau_{ss}}}{\partial s} + \overline{\tau_{ss}}\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial\overline{W}}{\partial s} + \right.$$

$$\left. + \overline{\tau_{nn}}\overline{i_{sc}}\overline{B} + \frac{\partial\overline{W}_n}{\partial s} - \overline{\tau_{mm}}q_L + \frac{\partial\overline{W}_m}{\partial s}\right) \tag{3.117}$$

Finalmente, el último término de la Ecuación (3.25) representa, tal cual se vió, la energía disipada. Si $\epsilon_o(s,t)$ es la densidad media por unidad de volumen de la potencia disipada en una sección, es decir

$$\epsilon_o(s,t) \equiv \frac{1}{\Omega}\int_\Omega \tau_{jl}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\,d\Omega \tag{3.118}$$

dicho término se transforma en

$$-\frac{1}{\gamma}\int_\forall \tau_{jl}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\,d\forall \cong -\frac{\delta s}{\gamma}\epsilon_o\Omega \tag{3.119}$$

Reemplazando término a término de la Ecuación (3.25), de acuerdo a las Ecuaciones (3.80), (3.86), (3.104), (3.117) y (3.119); dividiendo por $Q\delta s$; tomando el límite para $\delta s \to 0$, y reordenando, se obtiene la expresión general de la Ecuación de la Energía

$$\frac{\beta_o}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2g}\frac{\partial}{\partial s}(\alpha U^2) + \frac{\partial}{\partial s}(K_1 h\cos\theta) - I_o + \frac{\epsilon_o}{\gamma U} =$$

$$= \frac{1}{Q}\left[-\left(\alpha\frac{U^2}{2g} + K_1 h\cos\theta + z_o + \frac{\langle p_D\rangle_1}{\gamma}\right)\frac{\partial Q}{\partial s} - \right.$$

$$-\left(\beta_o\frac{U^2}{2g} + K_2 h\cos\theta + z_o + \frac{\langle p_D\rangle_2}{\gamma}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial t} +$$

$$+\left(\frac{\overline{V}_{sL}^2}{2g} + K_3 h\cos\theta + z_o + \frac{\langle p_D\rangle_3}{\gamma}\right)\overline{i}_{sL}\overline{B} -$$

$$-\left(\frac{\overline{V}_{sc}^2}{2g} + K_4 h\cos\theta + z_o + \frac{\langle p_D\rangle_4}{\gamma}\right)\overline{i}_{sc}\overline{B} +$$

$$+\left(\frac{\overline{V}_L^2}{2g} + K_5 h\cos\theta + z_o + \frac{\langle p_D\rangle_5}{\gamma}\right) q_L\Bigg] -$$

$$-\frac{U}{2g}\frac{\partial\beta_o}{\partial t} - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial s}\langle p_D\rangle_1 + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial\overline{\tau}_{ss}}{\partial s} +$$

$$+\frac{1}{\gamma Q}\left(\overline{\tau}_{ss}\frac{\partial Q}{\partial s} + \overline{\tau}_{nn}\overline{i}_{sc}\overline{B} - \overline{\tau}_{mm}q_L + \frac{\partial\overline{W}}{\partial s} + \frac{\partial\overline{W}_n}{\partial s} + \frac{\partial\overline{W}_m}{\partial s}\right) \qquad (3.120)$$

Restando miembro a miembro las Ecuaciones (3.120) y (3.40) de Continuidad, esta última multiplicada previamente por $\left(\frac{U^2}{2g} + h\cos\theta + z_o\right)$, se obtiene

$$\frac{\beta_o}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\alpha\frac{U^2}{2g} + K_1 h\cos\theta\right) - I_o + I_e =$$

$$= \frac{1}{Q}\Bigg\{\left[\left(\frac{U^2}{2g} - \frac{\overline{V}_{sc}^2}{2g}\right) + (1-K_4)h\cos\theta - \frac{\langle p_D\rangle_4}{\gamma}\right]\overline{i}_{sc}\overline{B} -$$

$$-\left[\left(\frac{U^2}{2g} - \frac{\overline{V}_{sL}^2}{2g}\right) + (1-K_3)h\cos\theta - \frac{\langle p_D\rangle_3}{\gamma}\right]\overline{i}_{sL}\overline{B} -$$

$$-\left[\left(\frac{U^2}{2g} - \frac{\overline{V}_L^2}{2g}\right) + (1-K_5)h\cos\theta - \frac{\langle p_D\rangle_5}{\gamma}\right] q_L +$$

$$+\left[-(\alpha-1)\frac{U^2}{2g} + (1-K_1)h\cos\theta - \frac{\langle p_D\rangle_1}{\gamma}\right]\frac{\partial Q}{\partial s} +$$

$$+\left[-(\beta_o-1)\frac{U^2}{2g} + (1-K_2)h\cos\theta - \frac{\langle p_D\rangle_2}{\gamma}\right]\frac{\partial\Omega}{\partial t}\Bigg\} -$$

$$-\frac{U}{2g}\frac{\partial\beta_o}{\partial t} - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial s}\langle p_D\rangle_1 + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial\overline{\tau}_{ss}}{\partial s} +$$

$$+\frac{1}{\gamma Q}\left(\overline{\tau}_{ss}\frac{\partial Q}{\partial s} + \overline{\tau}_{nn}\overline{i}_{sc}\overline{B} - \overline{\tau}_{mm}q_L + \frac{\partial\overline{W}}{\partial s} + \frac{\partial\overline{W}_n}{\partial s} + \frac{\partial\overline{W}_m}{\partial s}\right). \qquad (3.121)$$

donde se ha introducido la definición (2.49) de pendiente de energía.

Si el escurrimiento es unidireccional y la distribución de velocidades en cada sección transversal uniforme ($\beta_o = \alpha = 1$) ; si la distribución de presio-

nes es hidrostática ($\langle p_D \rangle_1 = \langle p_D \rangle_2 = \langle p_D \rangle_3 = 0$) y la superficie libre está nivelada en cada sección ($K_1 = K_2 = K_3 = 0$) ; si la pendiente del fondo es pequeña ($\cos\theta \cong 1$) , y si los efectos no disipativos de la turbulencia son despreciables, la Ecuación (3.121) se reduce a

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g}\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial s} - I_o + I_e =$$

$$= \frac{1}{Q}\left\{\left[\left(\frac{U^2}{2g} - \frac{\overline{V}_{sc}^2}{2g}\right) + (1-K_4)h - \frac{\langle p_D \rangle_4}{\gamma}\right]\overline{i}_{sc}\overline{B} - \left(\frac{U^2}{2g} - \frac{\overline{V}_{sL}^2}{2g}\right)\overline{i}_{sL}\overline{B} - \right.$$

$$\left. - \left[\left(\frac{U^2}{2g} - \frac{\overline{V}_L^2}{2g}\right) + (1-K_5)h - \frac{\langle p_D \rangle_5}{\gamma}\right] q_L \right\} \tag{3.122}$$

Teniendo en cuenta que

$$K_4 h + \frac{\langle p_D \rangle_4}{\gamma} = h_{sc} \tag{3.123}$$

$$K_5 h + \frac{\langle p_D \rangle_5}{\gamma} = h_L \tag{3.124}$$

donde h_{sc} y h_L son las alturas piezométricas de los respectivos aportes laterales respecto del fondo, la Ecuación (3.122) sólo difiere de la Ecuación (2.50) en que aparecen desglosadas las contribuciones dinámicas de los flujos laterales.

3.6. *Algunas Consideraciones Complementarias*

Las Ecuaciones Unidimensionales Generales de Continuidad, Cantidad de Movimiento y Energía aparecen en el Apéndice I, junto al resto de las fórmulas desarrolladas en el texto. Algunos aspectos de esas ecuaciones merecen un comentario adicional.

En primer lugar, debe tenerse en cuenta que lo usual es medir valores medios de las intensidades de precipitación e infiltración, $\langle i_{sL} \rangle$ e $\langle i_{sc} \rangle$, sobre superficies horizontales. Al disponer sólo de este tipo de datos, deben suponerse intensidades uniformes, eventualmente funciones del tiempo, con direcciones verticales de incidencia. Admitiendo esta hipótesis, el primer miembro de la Ecuación (3.34) no es más que el producto del valor uniforme de la intensidad de precipitación $\langle i_{sL} \rangle$, por el área efectiva que le presenta la superficie libre, es decir

$$-\int_{\text{sup.libre}} i_{sL} e_j^{sL} n_j dA \cong -\langle i_{sL} \rangle \bar{B}\, \delta s \cos\theta \qquad (3.125)$$

De las Ecuaciones (3.34) y (3.125) surge que

$$\overline{i_{sL}} = \langle i_{sL} \rangle \cos\theta \qquad (3.126)$$

Por analogía, resulta

$$\overline{i_{sc}} = \langle i_{sc} \rangle \cos\theta \qquad (3.127)$$

Reemplazando en la Ecuación (3.41), de acuerdo a las Ecuaciones (3.126) y (3.127), se obtiene

$$q = \left(\langle i_{sc} \rangle - \langle i_{sL} \rangle \right) \bar{B} \cos\theta - q_L \qquad (3.128)$$

que es la expresión utilizada en la práctica [34]. Por su parte, si se toma $\overline{u_{sL}} = \overline{u_{sc}} = 0$, lo cual es admisible habitualmente, las contribuciones dinámicas de ambos aportes laterales en la Ecuación (3.76) se transforma en

$$\overline{i_{sc}} \bar{B}(U - \overline{u_{sc}}) - \overline{i_{sL}} \bar{B}(U - \overline{u_{sL}}) = \left(\langle i_{sc} \rangle - \langle i_{sL} \rangle \right) \bar{B} U \cos\theta \qquad (3.129)$$

Si, además, se consideran despreciables las velocidades cuadráticas medias de precipitación y de infiltración frente a la velocidad media del flujo, y se admite una superficie libre enteramente nivelada en cada sección y una distribución hidrostática de presiones en las superficies de contacto con las masas fluidas que precipita y que se infiltra, las contribuciones dinámicas de ambos aportes en la Ecuación (3.121), se convierten en

$$\left[\left(\frac{U^2}{2g} - \frac{\overline{V_{sc}}^2}{2g} \right) + (1 - K_4) h \cos\theta - \frac{\langle p_D \rangle_4}{\gamma} \right] \overline{i_{sc}} \bar{B} -$$

$$- \left[\left(\frac{U^2}{2g} - \frac{\overline{V_{sL}}^2}{2g} \right) + (1 - K_3) h \cos\theta - \frac{\langle p_D \rangle_3}{\gamma} \right] \overline{i_{sL}} \bar{B} =$$

$$= \left(\langle i_{sc} \rangle - \langle i_{sL} \rangle \right) \frac{U^2}{2g} B \cos\theta \qquad (3.130)$$

En segundo lugar, puede obtenerse una relación interesante entre coeficientes de distribución de velocidades, para el caso de un escurrimiento gradualmente variado. Teniendo en cuenta que $V^2 \cong u^2$, puede escribirse

$$\beta_o \cong \beta = 1 + \frac{1}{\Omega} \int_\Omega \left(\frac{u}{U} - 1 \right)^2 d\Omega \qquad (3.131.a)$$

$$\alpha \cong 1 + \frac{3}{\Omega} \int_\Omega \left(\frac{u}{U} - 1 \right)^2 d\Omega + \frac{1}{\Omega} \int_\Omega \left(\frac{u_*}{U} - 1 \right)^3 d\Omega \qquad (3.131.b)$$

El integrando del último término de la Ecuación (3.131.b) es no

sólo siempre más pequeño en módulo que el del término anterior, sino también de signo cambiante a través de una sección. Si se desprecia este término frente al anterior, se obtiene la simple relación

$$(\alpha - 1) \cong 3\,(\beta - 1) \tag{3.132}$$

que pone de manifiesto que, en general, la corrección involucrada en α es aproximadamente tres veces mayor que la de β. En cursos de agua naturales β abarca un rango de valores que va desde 1.05 hasta 1.33, aproximadamente [5]. Para estimar valores típicos de α y β en un río de la Cuenca del Plata se utilizaron datos de distribución de velocidades tomados sobre el Río Paraná, a la altura del Túnel Subfluvial "Hernandarias". Se obtuvo

$$\begin{aligned} \beta &= 1.12 \\ \alpha &= 1.35 \end{aligned} \tag{3.133}$$

que verifican con buena aproximación a la Ecuación (3.132).

Finalmente, puede observarse que en el caso de escurrimiento uniforme (sin flujo lateral), la Ecuación (3.76) se reduce a

$$I_f = I_o \tag{3.134}$$

que expresa, simplemente, la igualdad entre la fuerza resistiva y la componente de la fuerza gravitatoria causante del movimiento. Por su parte, la Ecuación (3.121) da

$$I_e = I_o \tag{3.135}$$

que expresa que la energía potencial perdida por la masa líquida es enteramente disipada. De las Ecuaciones (3.134) y (3.135) surge

$$I_f = I_e \tag{3.136}$$

es decir, que la igualdad entre las pendientes de fricción y de energía es estrictamente válida si el escurrimiento es uniforme.

CAPITULO 4

ECUACION DE CONVECCION - DIFUSION

La Ecuación de Movimiento (2.60.a)

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g}\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{U\,|U|}{C^2 R} = D_{L1} \qquad (2.60.a)$$

representa, básicamente, el equilibrio entre las fuerzas de inercia, "motora" (peso y presiones) y resistiva. A velocidades de flujo suficientemente bajas estas fuerzas contribuyen de manera muy desproporcionada al balance, resultando, en general, la de inercia mucho menor que las restantes. Si ésto se tiene en cuenta explícitamente, puede reducirse el sistema de dos ecuaciones de Saint Venant a una sola ecuación (denominada de Convección-Difusión), cuya resolución resulta más accesible. Esta simplificación es la que se desarrolla en el primer parágrafo (4.1.) de este capítulo. En el segundo (4.2.), como complemento del anterior, se discute brevemente sobre la posibilidad de despreciar la difusión en determinadas circunstancias.

4.1. Ondas Difusivas

Para comparar el orden de magnitud de las contribuciones de los distintos términos de las Ecuaciones de Saint Venant, es conveniente proceder primero a adimensionalizarlas. Para ello deben considerarse valores típicos o "escalas" de las principales magnitudes que caracterizan al escurrimiento. Estas se denotarán en lo que sigue con una barra sobre la respectiva variable. Sean $\overline{U}$, $\overline{\Omega}$, $\overline{t}$, $\overline{s}$, $\overline{q}$, las escalas para la velocidad media de flujo, la sección transversal, el período y la longitud de la onda, y la descarga lateral por unidad de longitud, respectivamente. Las magnitudes admimensionales, que se denotarán con una tilde, se definen en la forma natural $U' \equiv U/\overline{U}$, $\Omega' \equiv \Omega/\overline{\Omega}$, etc. Si se introducen las variables adimensionales en la Ecuación de Continuidad, Ecuación (2.4) se obtiene, tras un simple paso algabraico

$$\frac{\partial Q'}{\partial s'} + \frac{\bar{s}}{\bar{U}\bar{t}} \frac{\partial \Omega'}{\partial t'} + \Psi q' = 0 \tag{4.1}$$

donde se ha considerado que $\bar{Q} = \bar{U}\bar{\Omega}$ y, además, se ha definido

$$\Psi \equiv \frac{\bar{q}\bar{s}}{\bar{U}\bar{\Omega}} \tag{4.2}$$

que puede interpretarse como la escala del flujo lateral relativa a la de la descarga del escurrimiento principal. Si Ψ es pequeño los dos términos restantes deben ser del mismo orden de magnitud. Entonces, puede establecerse la siguiente relación

$$\frac{\bar{s}}{\bar{U}\bar{t}} = 1 \tag{4.3}$$

con lo cual la Ecuación (4.1) se reduce a

$$\frac{\partial Q'}{\partial s'} + \frac{\partial \Omega'}{\partial t'} + \Psi q' = 0 \tag{4.4}$$

donde, eventualmente, puede descartarse el último término. El proceso análogo en la Ecuación de Movimiento puede llevarse a cabo partiendo de una expresión algo distinta de la Ecuación (2.60.a)

$$\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial s} - I_o + f^2 U|U| = D_{L1} \tag{4.5}$$

la cual se obtiene, simplemente, utilizando la Ecuación (2.13) y la definición siguiente del "factor de fricción" f

$$f \equiv \frac{1}{CR^{1/2}} \tag{4.6}$$

Si se introduce, además de las escalas anteriores, $\bar{h}$, $\bar{I}_o$ y $\bar{f}$, y se tienen en cuenta las Ecuaciones (2.61), la Ecuación (4.5) se transforma en

$$\frac{\bar{U}}{g\bar{t}} \frac{\partial U'}{\partial t'} + \frac{\bar{U}^2}{g\bar{s}} U' \frac{\partial U'}{\partial s'} + \frac{\bar{h}}{s} \frac{\partial h'}{\partial s'} - \bar{I}_o I'_o + \bar{f}^2 \bar{U}^2 f'^2 U'|U| = \frac{\bar{q}\bar{U}}{g\bar{\Omega}} D'_{L1} \tag{4.7}$$

Reordenando la Ecuación (4.7), y utilizando las Ecuaciones (4.2) y (4.3), se obtiene

$$\sigma^2 \epsilon \left(\frac{\partial U'}{\partial t'} + U' \frac{\partial U'}{\partial s'} - \Psi D'_{L1} \right) + \epsilon \frac{\partial h'}{\partial s'} - I'_o + \bar{f}^2 \frac{\bar{U}^2}{\bar{I}_o} f'^2 U'|U'| = 0 \tag{4.8}$$

donde

$$\sigma \equiv \bar{U} / (g\bar{h})^{1/2} \tag{4.9.a}$$

$$\epsilon \equiv \bar{h} / \bar{s}\bar{I}_o \tag{4.9.b}$$

son el número de Froude y un valor típico de la pendiente de la onda relativa

a la del fondo [17, pág. 377], respectivamente. Este último parámetro da una medida de la abruptuosidad ("steepness") de la onda.

Si σ es lo suficientemente pequeño (como sucede en muchas situaciones prácticas) puede despreciarse la contribución de los términos inerciales en la Ecuación (4.8). En estos casos los dos últimos términos suelen ser del mismo orden de magnitud, por lo cual puede establecerse la relación

$$\bar{f}^2 \frac{\bar{U}^2}{\bar{I}_o} = 1 \tag{4.10}$$

La contribución del término restante, $\epsilon\, \partial h'/\partial s'$, depende de la situación particular. En canales con pendientes suficientemente débiles (por ejemplo, en ríos de llanura), puede alcanzar un orden de magnitud cercano a la unidad. En cambio, en canales con pendientes relativamente mayores (pero aún lo suficientemente pequeñas como para no invalidar el tratamiento) $\epsilon \ll 1$ [17]. A título de ejemplo se presentan estimaciones de escalas en un típico río de llanura: el Río Paraná. Los valores son

$$\bar{U} = 1 \text{ m/seg} \qquad \bar{\Omega} = 10^4 \text{ m}^2$$

$$\bar{h} = 10 \text{ m} \qquad \bar{f}^2 = 10^{-5} \text{ seg}^2/\text{m}^2 \tag{4.11.a}$$

que determinan, de acuerdo a la Ecuación (4.9.a), $\sigma^2 \cong 10^{-2}$. Para una crecida típica, cuya rama ascendente se produce en algo más de diez días, $\bar{t} = 10^6$ seg. De las Ecuaciones (4.3) y (4.10) surgen

$$\bar{s} = 10^6 \text{ m}$$

$$\bar{I}_o = 10^{-5} \tag{4.11.b}$$

con los cuales puede calcularse ϵ, tal cual se definió en la Ecuación (4.9.b), que resulta igual a 1 (uno). Nótese que se necesitaría una crecida extraordinaria de sólo unos pocos días ($\bar{t} = 10^5$ seg) para bajar el orden de magnitud de ϵ a 10^{-1}.

De las Ecuaciones (4.8) y (4.10) surge que el valor absoluto de la descarga viene dado por

$$Q' = \frac{\Omega'}{f'} \left(I'_o - \epsilon \frac{\partial h'}{\partial s'} \right)^{1/2} + O(\sigma^2 \epsilon) \tag{4.12}$$

donde $O(\sigma^2\epsilon)$ engloba a los términos cuyo orden de magnitud es $\sigma^2\epsilon$, y mide el orden de aproximación dado por el primer término. Se se deriva la

Ecuación (4.12) respecto del tiempo, se utiliza la Ecuación (4.4) y se considera que $\overline{B} = \overline{\Omega}/\overline{h}$, se obtiene

$$\frac{\partial Q'}{\partial t'} + \frac{Q'}{\Omega'}\left(1 - \frac{\Omega'}{B'f'}\frac{\partial f'}{\partial h'}\right)\frac{\partial Q'}{\partial s'} = \frac{Q'\epsilon}{2\left(I'_o - \epsilon\frac{\partial h'}{\partial s'}\right)}\frac{\partial}{\partial s'}\left[\frac{1}{B'}\left(\frac{\partial Q'}{\partial s'} + \Psi q'\right)\right] -$$

$$- \frac{Q'}{\Omega'}\left(1 - \frac{\Omega'}{B'f'}\frac{\partial f'}{\partial h'}\right)\Psi q' + O(\sigma^2\epsilon) \qquad (4.13)$$

En los casos en que $\Psi \ll 1$ y en los cuales B' varía muy lentamente a lo largo del canal

$$\left|\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial s}\right| \ll \left|\frac{\partial^2 Q/\partial s^2}{\partial Q/\partial s}\right|$$

la Ecuación (4.13), aproximada a $O(\sigma^2\epsilon)$, se transforma en

$$\frac{\partial Q'}{\partial t'} + c'\frac{\partial Q'}{\partial s'} = \Lambda'\frac{\partial^2 Q'}{\partial s'^2} \qquad (4.14)$$

que es una ecuación de convección-difusión para el caudal, con una velocidad de convección

$$c' \equiv \frac{Q'}{\Omega'}\left(1 - \frac{\Omega'}{B'f'}\frac{\partial f'}{\partial h'}\right) \qquad (4.15.a)$$

y un coeficiente de difusión

$$\Lambda' \equiv \frac{Q'\epsilon}{2B'(I'_o - \epsilon\,\partial h'/\partial s')} \qquad (4.15.b)$$

El problema se reduce entonces a resolver la Ecuación (4.14), que es una ecuación diferencial de tipo parabólico (lo cual es compatible con la hipótesis $\sigma \cong 0$, es decir, que la velocidad relativa de propagación del fenómeno es infinita) para la variable Q' . Sus soluciones representan "ondas difusivas", denominación que se les asigna para diferenciarlas de las "ondas dinámicas", las cuales verifican las ecuaciones completas de Saint Venant.

En realidad, en la Ecuación (4.14) no ha sido eliminada totalmente la presencia de la variable h' , como surge de las Ecuaciones (4.15). Por lo tanto, su aplicación a una situación particular requiere un proceso previo de "calibración". Entre las técnicas desarrolladas se encuentran el método de "difusión lineal" [5], el "no lineal" [40], y el de "parámetros variables" [40, 41].

Las expresiones dimensionales de las Ecuaciones (4.14) y (4.15) son

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c\frac{\partial Q}{\partial s} = \Lambda\frac{\partial^2 Q}{\partial s^2} \qquad (4.16)$$

$$c \equiv \frac{Q}{\Omega}\left(1 - \frac{\Omega}{Bf}\frac{\partial f}{\partial h}\right) \tag{4.17.a}$$

$$\Lambda \equiv \frac{Q}{2B\,(I_o - \partial h/\partial s)} \tag{4.17.b}$$

4.2. *Ondas Cinemáticas*

La Ecuación (4.15.b) muestra que el coeficiente de difusión Λ' es tanto menor cuanto menor es ϵ, es decir, cuanto más "achatada" es la onda. En el límite cuando $\epsilon \to 0$ la difusión desaparece y la Ecuación (4.14) se reduce a una simple ecuación de convección

$$\frac{\partial Q'}{\partial t'} + c'\frac{\partial Q'}{\partial s'} = 0 \tag{4.18}$$

donde c' se expresa en la Ecuación (4.15.a). Las soluciones de la Ecuación (4.18) representan a las denominadas "ondas cinemáticas", las cuales se caracterizan porque se propagan sin atenuación [17]. Entonces, si bien las ondas cinemáticas pueden considerarse como la representación del escurrimiento en primera aproximación cuando σ', $\epsilon \ll 1$, sólo son capaces de describir el movimiento del "cuerpo principal" del flujo, pues no pueden dar cuenta de los cambios resultantes del efecto acumulativo de la difusión.

La expresión dimensional de la Ecuación (4.18) es

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \tag{4.19}$$

donde c está dado por la Ecuación (4.17.a).

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. **Batchelor, G.K.**, *An Introduction to Fluid Dynamics,* Cambridge University Press, U.K., 1967.
2. **Rouse, H.**, *Advanced Mechanics of Fluids,* Wiley, New York, 1959.
3. **Fulks, W.**, *Advanced Calculus,* Wiley, New York, 1965.
4. **Hinze, J.**, *Turbulence,* Mc Graw-Hill, 1959.
5. **Ven Te Chow**, *Open-Channel Hydraulics,* Mc Graw-Hill, 1959.
6. **Saint Venant, A.J.C.B. de,** "Des diverses manières de poser les équations du mouvement varié des eaux courantes", *Annales des Ponts et Chaussées,* 1st semester, 1887, serites 6, vol. 13.
7. **Saint Venant, A.J.C.B. de,** "Théorie du mouvement non permanent des eaux avec application aux crues des rivières et à introduction des marées dans leurs lits", *Comptes Rendus de L'Académie des Sciences,* 1871, t. 73.
8. **Keulegan, G.H.,** "Equation of Motion for the Steady Mean Flow of Water in Open Channels", *Journal of Research,* N.B.S., vol. 29, July, 1942.
9. **Keulegan, G.H.; Patterson, G.W.,** "Effect of Turbulence and Channel Slope in Translation Waves", *Journal of Research,* N.B.S., vol. 30, June, 1943.
10. **Farrel, C.,** "Discussion of 'Critical Analysis of Open-Channel Resistance', by H. Rouse", *Journal of the Hydraulics Division,* ASCE, vol. 92, no. HY2, March, 1966.
11. **Strelkoff, T.,** "One-Dimensional Equations of Open-Channel Flow", *Journal of the Hydraulics Division,* ASCE, vol. 95, No. HY3, May, 1969.
12. **Yen, B.C.; Wenzel, H.G. Jr.,** "Dynamic Equations for Steady Spatially Varied Flow", *Journal of the Hydraulics Division,* ASCE, vol. 96, No. HY3, March, 1970.
13. **Yen, B.,** "Open-Channel Flow Equations Revisited", *Journal of the Engineering Mechanics Division,* ASCE, No. EM5, October, 1973.

14. **Iwasa, Y.**, "Mathematical Aspects of One-Dimensional Eaquations of Unsteady Flows in Open-Channels", Paper No. D2, *Proc. Int. Symp. on Unsteady Flow in Open-Channels, BHRA Fluid Engineering,* Cranfield, U.K. April, 1976.
15. **Rouse, H.**, "Critical Analysis of Open-Channel Resistance", *Journal of the Hydraulics Division,* ASCE, vol. 91, No. HY4, July, 1965.
16. **Bridgman, P.W.**, *Dimensional Analysis,* Yale University Press, March, 1931.
17. **Henderson, F.M.**, *Open-Channel Flow,* Mac Millian, New York, 1966.
18. **Keulegan, G.H.**, "Laws of Turbulent Flow in Open-Channels", *Journal of Research,* N.B.S., vol. 21, December, 1938.
19. **Rouse, H.**, *Engineering Hydraulics,* Wiley, New York, 1967.
20. **Dalmati, D.**, *Manual de Hidráulica,* Tomo 1, CEILP, Universidad de La Plata.
21. **Aguirre Pe, A.**, *Hidráulica de Canales,* Facultad de Ingeniería de la Universidad de Los Andes, Editado por CIDIAT, Mérida, Venezuela, Abril de 1974.
22. **Alam, A.M.Z.; Kennedy, J.F.**, "Friction Factors for Flow in Sand Bed Channels", *Journal of the Hydraulics Division,* vol. 95, No. HY6, November, 1969.
23. **Task Committee for Preparation of the Sedimentation Manual, Committee on Sedimentation of The Hydraulics Division,** "Sediment Transportation Mechanics: F. Hydraulic Relations for Alluvial Streams", *Journal of the Hydraulics Division,* No. HY1, January, 1971.
24. **Yen, B.C.; Wenzel, H.G. Jr.; Yoon, Y.N.**, "Resistance Coefficients for Steady Spatially Varied Flow", *Journal of the Hydraulics Division,* ASCE, Vol. 98, No. HY8, August, 1972.
25. **Stoker, J.**, *Water Waves,* New York, 1959.
26. **Abbot, M.B.**, *An Introduction to the Method of Characteristics,* American Elsevier, New York, 1966.
27. **Kosorin, K.**, "The Complete Integrals of One-Dimensional Flow Equations", Paper No. D3, Proc. Int. Symp. on Unsteady Flow in Open-Channels, *BHRA Fluid Engineering,* Cranfield, U.K., April, 1976.
28. **Amein, M.; Fang, C.S.**, "Implicit Flood Routing in Natural Channels", *Journal of the Hydraulics Division,* ASCE, vol. 96, No. HY12, December, 1970.

29. **Amein, M.; Chu, H,,** "Implicit Numerical Modeling of Unsteady Flows", *Journal of the Hydraulics Division,* ASCE, vol. 101, No. HY12, December, 1970.

30. **Pujol, A.; Dolinkue, A.M.,** "Modelo Hidrodinámico EZEIZA III", *Informe del Laboratorio de Hidráulica Aplicada del INCyTH,* Ezeiza, Septiembre, 1974.

31. **Sivaloganathan, D.,** "Free Surface Flow Computations by Characteristics", *Journal of the Hydraulics Division*, vol. 104, No. HY4, April 1978.

32. **Thirriot, C.,** "Unsteady Flows in Double-Profiled Channels", Paper No. A3, *Proc. Int. Symp. on Unsteady Flow in Open-Channels, BHRA Fluid Engineering,* Cranfield, U.K., April, 1976.

33. **Macagno, E.O.,** *Turbulencia,* Publicación de la Universidad de Venezuela, Facultad de Ingeniería, Dpto. de Hidráulica, Junio, 1966.

34. **Chen, Ch.; Chow, V.T.,** "Formulation of Mathematical Watershed-Flow Model", *Journal of the Engineering Mechanics Division,* ASCE, Vol. 97, No. EM3, June, 1971.

35. **Santalo, L.A.,** *Vectores y Tensores,* EUDEBA, 1969.

36. **Rouse, H.; Siao, T.T.; Nagaratnam, S.,** "Turbulence Characteristics of the Hydraulic Jump", *Transactions,* ASCE, vol. 124, 1959.

37. **Raichlen, F.,** "Some Turbulence Measurements in Water", *Journal of the Engineering Mechanics Division,* ASCE, vol. 93, No. EM2, April, 1967.

38. **Richardson, E.V.; Mc Quirey, R.S.,** "Measurement of Turbulence in Water", *Journal of the Hydraulics Division,* ASCE, vol. 94, No. HY2, 1968.

39. **Rouse, H.,** *Elementary Mechanics of Fluids,* Wiley, New York, 1946.

40. **Price, R.K.,** "Flood Routing Methods for British Rivers", INT 111, *Hydraulics Research Station,* Wallingford, March, 1973.

41. **Price, R.K.; Kawecki, M.W.,** "Equivalent River Models", Paper No. K4, *Proc. Int. Symp. on Unsteady Flow in Open-Channels, BHRA Fluid Engineering*, Cranfield, U.K., April, 1976.

NOMENCLATURA

A : superficie cerrada que contiene a $\forall$

B : longitud de la curva intersección entre la superficie libre y la sección transversal

$\overline{B}$: distancia horizontal entre orillas, transversal al escurrimiento

C : coeficiente de Chezy

Fr : número de Froude

H : altura total de carga del escurrimiento principal

H_L : altura total de carga del flujo lateral

I : pendiente de la superficie libre

I_o : pendiente del fondo del cauce

I_e : pendiente de energía

I_f : pendiente de fricción

K, K_i : coeficientes de distribución de presiones $(i = 1, 2, \ldots, 5)$

Q : caudal o descarga

R : radio hidráulico

Re : número de Reynolds

T : tirante hidráulico

U : velocidad media de flujo

U_F : velocidad del resalto hidráulico móvil

V : módulo del vector velocidad u_i

V_L : módulo de la velocidad del flujo lateral

$\overline{V}_{sL}$: módulo de la velocidad media de precipitación

$\overline{V}_{sc}$: módulo de la velocidad media de infiltración

$\overline{V}_L$: módulo de la velocidad media del escurrimiento lateral

$\forall$: volumen de fluido

$\overline{W}$: trabajo de las tensiones de corte sobre la sección transversal Ω

$\overline{W}_n$: trabajo de las tensiones de corte sobre el cauce

$\overline{W}_m$: trabajo de las tensiones de corte sobre el escurrimiento lateral

b : coordenada transversal tangente a la superficie libre

e_j^s : versor en la dirección s

e_j^{sc} : versor en la dirección de infiltración
e_j^{sL} : versor en la dirección de precipitación
g : módulo de la aceleración de la gravedad
g_i : componentes de la aceleración de la gravedad
h : profundidad media de flujo
$\bar{h}$: profundidad del centroide de la sección transversal Ω
h_L : altura piezométrica del flujo lateral respecto del fondo
i_{sL} : intensidad de precipitación
i_{sc} : intensidad de infiltración
$\bar{i}_{sL}$, $\langle i_{sL} \rangle$: valores medios de intensidad de precipitación
$\bar{i}_{sc}$, $\langle i_{sc} \rangle$: valores medios de intensidad de infiltración
l : coordenada transversal tangente al cauce
n : coeficiente de Manning
n_i : versor normal a A
p : presión
p_D : presión dinámica
$\langle p_D \rangle$, $\langle p_D \rangle_i$: valores medios de presión dinámica $(i = 1, 2, \ldots, 5)$
q : descarga lateral (saliente) por unidad de longitud
q_L : aporte de volumen del escurrimiento lateral, por unidad de longitud
s : coordenada en la dirección del escurrimiento
t : tiempo
u_i : componentes del campo de velocidades
$u = u_1$: componente según s del campo de velocidades
u_L : componente según s de la velocidad del flujo lateral
$\bar{u}_{sL}$: componente media según s de la velocidad de precipitación
$\bar{u}_{sc}$: componente media según s de la velocidad media de infiltración
$\bar{u}_L$: componente media según s de la velocidad del escurrimiento lateral
$v = u_2$: componente según ξ del campo de velocidades
$w = u_3$: componente según η del campo de velocidades
w_j : velocidad local de la superficie A
$x_1 = s$
$x_2 = \xi$
$x_3 = \eta$
z : altura de la superficie libre respecto de un plano horizontal de referencia

z_o : altura del fondo del cauce respecto de un plano horizontal de referencia

z_L : altura piezométrica del flujo lateral respecto de un plano horizontal de referencia

α, β, β_o : coeficientes de distribución de velocidades

γ : peso específico de fluido

ϵ_o : valor medio sobre una sección de la potencia disipada por unidad de volumen

ζ : coordenada vertical con sentido hacia arriba

η : eje coordenado normal a s, perteneciente al plano vertical que pasa por el fondo del cauce y que apunta desde el fondo hacia la superficie libre

η_l : coordenada η de la superficie libre

θ : ángulo de inclinación del eje s respecto de un plano horizontal

θ_{sL} : ángulo de inclinación de la normal a la superficie libre respecto del plano normal al eje s

θ_{sc} : ángulo de inclinación de la normal a la superficie del cauce respecto del plano normal al eje s

μ : viscosidad dinámica del fluído

ξ : eje coordenado que forma una terna inversa con s y η

ρ : densidad de masa del fluido

τ_{jl} : componentes del tensor de las tensiones de deformación

τ_o : valor medio en una sección de la tensión de corte sobre la superficie del cauce

$\langle \tau_{ss} \rangle, \overline{\tau}_{ss}$: valores medios de la tensión de deformación normal en la dirección s

$\overline{\tau}_{nn}$: valor medio de la tensión de deformación normal en la dirección normal a la superficie del cauce

$\overline{\tau}_{mm}$: valor medio de la tensión de deformación normal en la dirección normal a la superficie de separación entre el escurrimiento principal y el lateral

χ : perímetro mojado

Ω : área de la sección transversal al escurrimiento

APENDICE I

RESUMEN DE FORMULAS

Se presenta aquí el resumen de los diversos sistemas de ecuaciones que, con distinto grado de generalidad, describen un escurrimiento a cauce fijo. En el primer parágrafo (I.1.) se muestran las Ecuaciones Unidimensionales Generales; en el segundo (I.2.) las de Saint Venant; y en el tercero (I.3.) la de Convección-Difusión.

I.1. Ecuaciones Unidimensionales Generales

a) Ecuación de Continuidad

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = (\overline{i_{sL}} - \overline{i_{sc}})\overline{B} + \overline{q_L} \tag{I.1}$$

b) Ecuación de la Cantidad de Movimiento

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\beta \frac{U^2}{2g} + Kh\cos\theta\right) - I_o + I_f = \frac{q}{\Omega g}(U - u_L) -$$

$$- \frac{(\beta - 1)U}{\Omega g}\frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{U^2}{2g}\frac{\partial \beta}{\partial s} - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial s}\langle p_D \rangle + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial s}\langle \tau_{ss} \rangle \tag{I.2}$$

c) Ecuación de la Energía

$$\frac{\beta_o}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\alpha \frac{U^2}{2g} + K_1 h\cos\theta\right) - I_o + I_e =$$

$$= \frac{1}{Q}\left\{\left[\left(\frac{U^2}{2g} - \frac{\overline{V}_{sc}^2}{2g}\right) + (1 - K_4)h\cos\theta - \frac{\langle p_D \rangle_4}{\gamma}\right]\overline{i_{sc}}\,\overline{B} -\right.$$

$$-\left[\left(\frac{U^2}{2g} - \frac{\overline{V}_{sL}^2}{2g}\right) + (1 - K_3)h\cos\theta - \frac{\langle p_D \rangle_3}{\gamma}\right]\overline{i_{sL}}\,\overline{B} -$$

$$-\left[\left(\frac{U^2}{2g} - \frac{\overline{V}_L^2}{2g}\right) + (1 - K_5)h\cos\theta - \frac{\langle p_D \rangle_5}{\gamma}\right] q_L +$$

$$+\left[-\frac{U^2}{2g}(\alpha-1)+(1-K_1)h\cos\theta-\frac{\langle p_D\rangle_1}{\gamma}\right]\frac{\partial Q}{\partial s}+$$

$$+\left[-\frac{U^2}{2g}(\beta_o-1)+(1-K_2)h\cos\theta-\frac{\langle p_D\rangle_2}{\gamma}\right]\frac{\partial\Omega}{\partial t}\Bigg\}-$$

$$-\frac{U}{2g}\frac{\partial\beta_o}{\partial t}-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial s}\langle p_D\rangle_1+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial s}\overline{\tau_{ss}}+$$

$$+\frac{1}{\gamma Q}\left(\overline{\tau_{ss}}\frac{\partial Q}{\partial s}+\overline{\tau_{nn}}\overline{\Gamma_{sc}}\overline{B}-\overline{\tau_{mm}}q_L+\frac{\partial\overline{W}}{\partial s}+\frac{\partial\overline{W_n}}{\partial s}+\frac{\partial\overline{W_m}}{\partial s}\right) \qquad (I.3)$$

I.2. Ecuaciones de Saint Venant

En la Tabla I.1. se presentan las Ecuaciones de Continuidad, Cantidad de Movimiento y Energía para un flujo gradualmente variado, expresadas en sus diversas formas de acuerdo a la elección de las variables dependientes primarias. La Ecuación de Movimiento, que surge de entre las dos últimas, adopta en general la siguiente forma

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{U}{g}\frac{\partial U}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial s}+\frac{U|U|}{C^2R}=D_{L1} \qquad (I.4)$$

en términos de U y z, o bien

$$\frac{1}{g\Omega}\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{2Q}{g\Omega^2}\frac{\partial Q}{\partial s}-\frac{Q^2}{g\Omega^3}\frac{\partial\Omega}{\partial s}\Bigg]_z+\frac{\partial z}{\partial s}(1-Fr^2)+\frac{Q|Q|}{C^2\Omega^2R}=D_{L2} \qquad (I.5)$$

en términos de Q y z, donde D_{L1} y D_{L2} se expresan en la Tabla I.2 para diversos casos particulares.

En régimen permanente puede obtenerse, a partir de las Ecuaciones de Continuidad y de Movimiento, una ecuación para la determinación del perfil del pelo de agua, que es

$$\frac{dz}{ds}=\frac{-\dfrac{Q|Q|}{C^2\Omega^2R}+\dfrac{Q^2}{g\Omega^3}\dfrac{\partial\Omega}{\partial s}\Big]_z+D_{L3}}{1-Fr^2} \qquad (I.6)$$

donde D_{L3} se expresa en la Tabla I.2.

TABLA I.1

Variables	Q , Ω	Q , h	Q , z
Ecuación de Continuidad	$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} + q = 0$	$\frac{\partial Q}{\partial s} + B\frac{\partial h}{\partial t} + q = 0$	$\frac{\partial Q}{\partial s} + B\frac{\partial z}{\partial t} + q = 0$
Ecuación de la Cantidad de Movimiento	———	$\left.\frac{1}{g\Omega}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{g\Omega^2}\frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{Q^2}{g\Omega^3}\frac{\partial \Omega}{\partial s}\right]_h + \frac{\partial h}{\partial s}(1-Fr^2) - I_o + I_f = -\frac{qu_L}{g\Omega}$	$\left.\frac{1}{g\Omega}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{g\Omega^2}\frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{Q^2}{g\Omega^3}\frac{\partial \Omega}{\partial s}\right]_z + \frac{\partial z}{\partial s}(1-Fr^2) + I_f = -\frac{qu_L}{g\Omega}$
Ecuación de la Energía	———	$\frac{1}{g\Omega}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{g\Omega^2}\frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{Q^2}{g\Omega^3}\frac{\partial \Omega}{\partial s}_h + \frac{\partial h}{\partial s}(1-Fr^2) - I_o + I_e = \frac{q}{Q}\left(h - h_L - \frac{Q^2}{2g\Omega^2} - \frac{V_L^2}{2g}\right)$	$\frac{1}{g\Omega}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{g\Omega^2}\frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{Q^2}{g\Omega^3}\frac{\partial \Omega}{\partial s}_z + \frac{\partial z}{\partial s}(1-Fr^2) + I_e = \frac{q}{Q}\left(z - z_L - \frac{Q^2}{2g\Omega^2} - \frac{V_L^2}{2g}\right)$

TABLA 1.1-Continuación

Variables	U, Ω	U, h	U, z
Ecuación de Continuidad	$\Omega \frac{\partial U}{\partial s} + U \frac{\partial \Omega}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} + q = 0$	$\Omega \frac{\partial U}{\partial s} + U \frac{\partial \Omega}{\partial s}\Big]_h + B\left(U \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial t}\right) + q = 0$	$\Omega \frac{\partial U}{\partial s} + U \frac{\partial \Omega}{\partial s}\Big]_z + B\left(U \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial t}\right) + q = 0$
Ecuación de la Cantidad de Movimiento	———	$\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g}\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial s} - I_o + I_f = \frac{q}{g\Omega}(U - u_L)$	$\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g}\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial s} + I_f = \frac{q}{g\Omega}(U - u_L)$
Ecuación de la Energía	———	$\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g}\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial s} - I_o + I_e = \frac{q}{\Omega U}\left[\left(h + \frac{U^2}{2g} - h_L - \frac{V_L^2}{2g}\right)\right]$	$\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g}\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial s} + I_e = \frac{q}{\Omega U}\left[\left(z + \frac{U^2}{2g} - z_L + \frac{V_L^2}{2g}\right)\right]$

Aporte dinámico del flujo lateral / Caso particular	D_{L1}	D_{L2}	D_{L3}
No existe flujo lateral	0	0	0
Flujo lateral entrante por precipitación o escurrimiento lateral	$\frac{q}{\Omega g}(U-u_L)$	$-\frac{qu_L}{\Omega g}$	$\frac{q}{\Omega g}\left(2\frac{Q}{\Omega}-u_L\right)$
Flujo lateral saliente por vertedero lateral	0	$-\frac{qQ}{\Omega^2 g}$	$\frac{qQ}{\Omega^2 g}$
Filtración (entrante o saliente)	$\frac{qU}{2\Omega g}$	$-\frac{qQ}{2\Omega^2 g}$	$\frac{3}{2}\frac{qQ}{\Omega^2 g}$

TABLA I.2

I.3. Ecuación de Convección-Difusión

En escurrimientos a bajo número de Froude el sistema de dos ecuaciones se reduce a una ecuación de convección-difusión para el caudal

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c\,\frac{\partial Q}{\partial s} = \Lambda\,\frac{\partial^2 Q}{\partial s^2} \tag{I.7}$$

donde

$$c \equiv \frac{Q}{\Omega}\left(1 - \frac{\Omega}{Bf}\,\frac{\partial f}{\partial h}\right) \tag{I.8.a}$$

$$\Lambda \equiv \frac{Q}{2B\left(I_o - \frac{\partial h}{\partial s}\right)} \tag{I.8.b}$$

$$f \equiv \frac{1}{CR^{1/2}} \tag{I.8.c}$$

APENDICE II

ECUACIONES DE SAINT VENANT EN UN SISTEMA DE REFERENCIA MOVIL

Existen circunstancias en las cuales es conveniente observar un fenómeno desde un sistema de referencia móvil respecto del cauce. Tal es el caso, por ejemplo, de una onda que se traslada conservando su forma: observada desde un sistema que se desplaza con su misma velocidad constituye un fenómeno estacionario.

A continuación, se procede a obtener las expresiones de las Ecuaciones de Continuidad, Cantidad de Movimiento y Energía en un sistema de referencia móvil que se desplaza con una velocidad arbitraria U_o, eventualmente función del tiempo, en la dirección del escurrimiento.

Sea r la coordenada en la dirección del escurrimiento, medida en el sistema de referencia móvil. Su origen de coordenadas, observado desde el sistema fijo al cauce, está representado por $s = s_o(t)$, de modo que

$$\frac{ds_o}{dt} = U_o$$

La ecuación que liga ambos sistemas de coordenadas es $s = r + s_o$, es decir

$$s = r + \int U_o \, dt \qquad \text{(II.1)}$$

De la Ecuación (II.1) surgen las siguientes relaciones

$$U = U_r + U_o \qquad \text{(II.2.a)}$$

$$Q = Q_r + U_o \Omega \qquad \text{(II.2.b)}$$

$$\left.\frac{\partial r}{\partial s}\right]_t = 1 = \left.\frac{\partial s}{\partial r}\right]_t \qquad \text{(II.2.c)}$$

$$\left.\frac{\partial s}{\partial t}\right]_r = U_o \qquad \text{(II.2.d)}$$

$$\left.\frac{\partial r}{\partial t}\right]_s = -U_o \qquad \text{(II.2.e)}$$

donde U_r es la velocidad ("relativa") medida en el sistema móvil, y

$$Q_r \equiv U_r \Omega \tag{II.3}$$

La transformación de la Ecuación (2.4) de Continuidad al sistema móvil, es ahora factible. Si se hace la identificación

$$Q(r, t) \equiv Q[s(r, t), t] \tag{II.4.a}$$

$$\Omega(r, t) \equiv \Omega[s(r, t), t] \tag{II.4.b}$$

se obtiene

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial s}\right]_t = \left.\frac{\partial Q}{\partial r}\right]_t \left.\frac{\partial r}{\partial s}\right]_t \tag{II.5.a}$$

$$\left.\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right]_s = \left.\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right]_r + \left.\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right]_t \left.\frac{\partial r}{\partial t}\right]_s \tag{II.5.b}$$

Utilizando las Ecuaciones (II.2.b), (II.2.c) y (II.2.e), las relaciones anteriores se convierten, respectivamente, en

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial s}\right]_t = \left.\frac{\partial Q_r}{\partial r}\right]_t + U_o \left.\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right]_t \tag{II.6.a}$$

$$\left.\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right]_s = \left.\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right]_r - U_o \left.\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right]_t \tag{II.6.b}$$

Reemplazando las Ecuaciones (II.6.a) y (II.6.b) en la Ecuación (2.4), se obtiene la Ecuación de Continuidad en términos de Q_r y de Ω

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} + q = 0 \tag{II.7}$$

donde, análogamente a lo realizado anteriormente, $q(r, t) = q(s(r, t), t)$. Se observa la identidad formal entre las Ecuaciones (2.4) y (II.7), lo que era de esperarse, pues el razonamiento del cual se obtuvo la Ecuación (2.4) no se ve prácticamente afectado si el volumen δV es móvil.

La expresión de la Ecuación de Continuidad en términos de U_r y de Ω surge, simplemente, de utilizar la relación (II.3), con lo cual se obtiene

$$\Omega \frac{\partial U_r}{\partial r} + U_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} + q = 0 \tag{II.8}$$

que es la correspondiente a la Ecuación (2.6).

Si la superficie libre está nivelada en cada sección transversal, entonces $\Omega = \Omega(s, h)$, y puede escribirse

$$\left.\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right]_r = \left.\frac{\partial\Omega}{\partial s}\right]_h \left.\frac{\partial s}{\partial t}\right]_r + \left.\frac{\partial\Omega}{\partial h}\right]_s \left.\frac{\partial h}{\partial t}\right]_r$$

$$= U_o \left.\frac{\partial\Omega}{\partial s}\right]_h + B \left.\frac{\partial h}{\partial t}\right]_r \qquad (II.9)$$

donde la última igualdad surge de utilizar las Ecuaciones (II.2.d) y (2.7). Reemplazando la Ecuación (II.9) en la Ecuación (II.7), se obtiene la Ecuación de Continuidad de términos de Q_r y de h

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + B \frac{\partial h}{\partial t} + U_o \left.\frac{\partial\Omega}{\partial s}\right]_h + q = 0 \qquad (II.10)$$

donde $h(r, t) = h\,(s(r, t), t)$, y además $B = B(s, h) = B\,(r + \int U_o dt, h)$ tiene dependencia temporal explícita conocida a priori, e implícita a través de $h = h\,(r, t)$; lo mismo ocurre con $\left.\frac{\partial\Omega}{\partial s}\right]_h$. La Ecuación (II.10) es la correspondiente a la Ecuación (2.8).

Análogamente a lo realizado en la Ecuación (II.9), puede calcularse

$$\left.\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right]_t = \left.\frac{\partial\Omega}{\partial s}\right]_h \left.\frac{\partial s}{\partial r}\right]_t + \left.\frac{\partial\Omega}{\partial h}\right]_s \left.\frac{\partial h}{\partial r}\right]_t$$

$$= \left.\frac{\partial\Omega}{\partial s}\right]_h + B \left.\frac{\partial h}{\partial r}\right]_t \qquad (II.11)$$

donde se han utilizado las Ecuaciones (II.2.c) y (2.7).

Reemplazando las Ecuaciones (II.9) y (II.11) en la Ecuación (II.8), se obtiene la Ecuación de Continuidad en términos de U_r y de h

$$\Omega \frac{\partial U_r}{\partial r} + (U_r + U_o) \left.\frac{\partial\Omega}{\partial s}\right]_h + B\left(U_r \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial h}{\partial t}\right) + q = 0 \qquad (II.12)$$

donde, al igual que B y $\left.\frac{\partial\Omega}{\partial s}\right]_h$, $\Omega = \Omega\,(r + \int U_o\, dt, h)$. La Ecuación (II.12) es la correspondiente a la Ecuación (2.10).

Finalmente, es posible obtener expresiones de esta ecuación en términos de la variable z . Si la pendiente del lecho es muy pequeña vale la Ecuación (2.11), y teniendo en cuenta, de acuerdo a las Ecuaciones (II.2.c), (II.2.d) y (2.14), que

$$\left.\frac{\partial z_o}{\partial t}\right]_r = \frac{dz_o}{ds} \left.\frac{\partial s}{\partial t}\right]_r = -I_o U_o \qquad (II.13.a)$$

$$\left.\frac{\partial z_o}{\partial r}\right]_t = \frac{dz_o}{ds}\left.\frac{\partial s}{\partial r}\right]_t = -I_o \qquad \text{(II.13.b)}$$

se obtiene

$$\left.\frac{\partial h}{\partial t}\right]_r = \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right]_r + I_o U_o \qquad \text{(II.14.a)}$$

$$\left.\frac{\partial h}{\partial r}\right]_t = \left.\frac{\partial z}{\partial r}\right]_t + I_o \qquad \text{(II.14.b)}$$

Utilizando las Ecuaciones (II.14.a), (II.14.b) y (2.15), se obtiene la Ecuación de Continuidad en términos de Q_r y de z

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + B\frac{\partial z}{\partial t} + U_o\left.\frac{\partial \Omega}{\partial s}\right]_z + q = 0 \qquad \text{(II.15)}$$

que es la correspondiente a la Ecuación (2.12), y la Ecuación de Continuidad en términos de U_r y de z

$$\Omega\frac{\partial U_r}{\partial r} + (U_r + U_o)\left.\frac{\partial \Omega}{\partial s}\right]_z + B\left(U_r\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial t}\right) + q = 0 \qquad \text{(II.16)}$$

que es la correspondiente a la Ecuación (2.16). En estas expresiones B ; Ω y $\left.\frac{\partial \Omega}{\partial s}\right]_z$ son funciones de $(r + \int U_o\, dt)$ y de h.

La transformación de la Ecuación de la Cantidad de Movimiento se hace mediante un proceso análogo al anterior. Las relaciones siguiente, fácilmente obtenibles,

$$\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right]_s = \left.\frac{\partial U_r}{\partial t}\right]_r + \frac{dU_o}{dt} - U_o\left.\frac{\partial U_r}{\partial r}\right]_t \qquad \text{(II.17.a)}$$

$$U\left.\frac{\partial U}{\partial s}\right]_t = (U_r + U_o)\left.\frac{\partial U_r}{\partial r}\right]_t \qquad \text{(II.17.b)}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right]_t = \left.\frac{\partial z}{\partial r}\right]_t \qquad \text{(II.17.c)}$$

$$\left.\frac{\partial h}{\partial s}\right]_t = \left.\frac{\partial h}{\partial r}\right]_t \qquad \text{(II.17.d)}$$

pueden ser reemplazadas en las Ecuaciones (2.31) y (2.33), de lo cual surgen

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U_r}{\partial t} + \frac{U_r}{g}\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial r} + I_f + \frac{1}{g}\frac{dU_o}{dt} = \frac{q}{g\Omega}(U_r - u_{Lr}) \qquad \text{(II.18)}$$

que es la Ecuación de la Cantidad de Movimiento en términos de U_r y de z, y

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U_r}{\partial t} + \frac{U_r}{g}\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\partial h}{\partial r} - I_o + I_f + \frac{1}{g}\frac{dU_o}{dt} = \frac{q}{g\Omega}(U_r - u_{Lr}) \qquad (II.19)$$

que es la Ecuación de la Cantidad de Movimiento en términos de U_r y de h, en las cuales $u_{Lr} = u_L - U_o$. Se observa que, tal cual era de esperarse, la única diferencia formal con las Ecuaciones (2.31) y (2.33) reside en la aparición de una fuerza de inercia debido al movimiento acelerado del sistema de referencia. Algo similar debe ocurrir, entonces, con las Ecuaciones (2.34) y (2.35), que se transforman en

$$\left.\frac{1}{g\Omega}\frac{\partial Q_r}{\partial t} + \frac{2Q_r}{g\Omega^2}\frac{\partial Q_r}{\partial r} - \frac{Q_r^2}{g\Omega^3}\frac{\partial \Omega}{\partial s}\right]_z + \frac{\partial z}{\partial r}(1 - F_r'^2) +$$

$$+ I_f + \frac{1}{g}\frac{dU_o}{dt} = -\frac{qu_{Lr}}{g\Omega} \qquad (II.20)$$

que es la Ecuación de la Cantidad de Movimiento en términos de Q_r y de z, y

$$\left.\frac{1}{g\Omega}\frac{\partial Q_r}{\partial t} + \frac{2Q_r}{g\Omega^2}\frac{\partial Q_r}{\partial r} - \frac{Q_r^2}{g\Omega^3}\frac{\partial \Omega}{\partial s}\right]_h + \frac{\partial h}{\partial r}(1 - F_r'^2) -$$

$$- I_o + I_f + \frac{1}{g}\frac{dU_o}{dt} = -\frac{qu_{Lr}}{g\Omega} \qquad (II.21)$$

que es la Ecuación de la Cantidad de Movimiento en términos de Q_r y de h, en las cuales se ha utilizado el número de Froude

$$F'_r \equiv \left(\frac{Q_r^2 B}{g\Omega^3}\right)^{1/2} \qquad (II.22)$$

El resultado de la transformación de la Ecuación de la Energía a un sistema móvil no es tan sencillo como en el caso anterior. En efecto, si bien el valor de la pendiente de fricción I_f, ligada a la tensión de corte sobre el cauce, no se ve afectado al cambiar de sistema, no ocurre lo mismo con la pendiente de energía I_e, ligada a la energía disipada. Es entonces necesario realizar todo el proceso de cálculo, el cual siguiendo líneas análogas a las anteriores, provee las expresiones

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U_r}{\partial t} + \frac{U_r}{g}\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial r} + I_e + \frac{1}{g}\frac{dU_o}{dt} =$$

$$= \frac{q}{\Omega(U_r + U_o)}\left[\left(z + \frac{U_r^2}{2g}\right) - \left(z_L + \frac{V_{Lr}^2}{2g}\right) + \frac{U_o}{g}(U_r - u_{Lr})\right] \qquad (II.23)$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U_r}{\partial t} + \frac{U_r}{g}\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\partial h}{\partial r} - I_o + I_e + \frac{1}{g}\frac{dU_o}{dt} =$$

$$= \frac{q}{\Omega(U_r + U_o)}\left[\left(h + \frac{U_r^2}{2g}\right) - \left(h_L + \frac{V_{Lr}^2}{2g}\right) + \frac{U_o}{g}(U_r - u_{Lr})\right] \qquad (II.24)$$

$$\frac{1}{g\Omega}\frac{\partial Q_r}{\partial t} + \frac{2Q_r}{g\Omega^2}\frac{\partial Q_r}{\partial r} - \frac{Q_r^2}{g\Omega^3}\frac{\partial \Omega}{\partial s}\Bigg]_z + \frac{\partial z}{\partial r}(1 - F_r'^2) + I_e =$$

$$= \frac{q}{(Q_r + U_o\Omega)}\left[(z - z_L) - \frac{Q_r^2}{2g\Omega^2} - \frac{V_{Lr}^2}{2g} - \frac{U_o u_{Lr}}{g}\right] \qquad (II.25)$$

$$\frac{1}{g\Omega}\frac{\partial Q_r}{\partial t} + \frac{2Q_r}{g\Omega^2}\frac{\partial Q_r}{\partial r} - \frac{Q_r^2}{g\Omega^3}\frac{\partial \Omega}{\partial s}\Bigg]_h + \frac{\partial h}{\partial r}(1 - F_r'^2) - I_o + I_e =$$

$$= \frac{q}{(Q_r + U_o\Omega)}\left[(h - h_L) - \frac{Q_r^2}{2g\Omega^2} - \frac{V_{Lr}^2}{2g} - \frac{U_o u_{Lr}}{g}\right] \qquad (II.26)$$

donde $V_{Lr} = (V_L^2 + U_o^2 - 2u_L U_o)^{1/2}$ es el módulo de la velocidad relativa del flujo lateral, e I_e es la pendiente de energía en el sistema fijo al cauce.

INDICE

Página

Introducción 1

Capítulo 1

Modelo Teórico del Escurrimiento 3

Capítulo 2

Ecuaciones de Saint Venant 7

2.1. Ecuación de Continuidad 8

2.2. Ecuación de la Cantidad de Movimiento 13

2.3. Ecuación de la Energía 16

2.4. Comparación entre las Ecuaciones de la Cantidad de Movimiento y de la Energía 19

2.5. Parametrización de los Efectos Resistivos 23

2.6. Reseña sobre Métodos de Resolución 27

2.7. Extensiones 29

Capítulo 3

Ecuaciones Unidimensionales Generales 33

3.1. Planteo Básico 34

3.2. Ecuación de Continuidad 40

3.3. Análisis de la Distribución de Presiones 43

3.4. Ecuación de la Cantidad de Movimiento 50

3.5. Ecuación de la Energía 54

3.6. Algunas Consideraciones Complementarias 62

Capítulo 4

Ecuación de Convección-Difusión 65

4.1. Ondas Difusivas 65

4.2. Ondas Cinemáticas 69

Referencias Bibliográficas 71
Nomenclatura 75

Apéndice I
Resumen de Fórmulas 79
I.1. Ecuaciones Unidimensionales Generales 79
I.2. Ecuaciones de Saint Venant 80
I.3. Ecuación de Convección-Difusión 81

Apéndice II
Ecuación de Saint Venant en un Sistema de Referencia Móvil 85

Serie Ciencias y Técnicas Hídricas

Esta obra es la primera de una serie destinada a la difusión de las contribuciones de los estudiosos de la problemática hídrica, que el Instituto Nacional de Ciencia y Técnica Hídricas (INCYTH) patrocina en cumplimiento de sus objetivos básicos.

Análisis Unidimensional de Escurrimiento en Canales

En este libro se desarrollan las ecuaciones básicas que describen el escurrimiento en cauces naturales y artificiales. Se presentan tres modelos teóricos de decreciente grado de generalidad: Modelo Unidimensional General, Ecuaciones de Saint Venant y Ecuación de Convección-Difusión.

El conocimiento de esas ecuaciones tiene una gran importancia práctica en los "modelos matemáticos" computacionales para la simulación de los fenómenos hidráulicos.

Los autores, A. PUJOL y A.N. MENENDEZ, tienen una dilatada experiencia en el tema, adquirida en el Laboratorio de Hidráulica Aplicada del INCYTH y en el Instituto de Investigaciones Hidráulicas de la Universidad de Iowa, U.S.A. Asimismo, son docentes de las Universidades de Buenos Aires y Nacional del Litoral.

EUDEBA