

# MODELO DE ELEMENTOS FINITOS CONTÍNUO/DISCONTÍNUO NO-HIDROSTÁTICO PARA PROCESOS COSTEROS

Lucas E. Calvo Gobbetti

Centro de Investigaciones Hidráulicas e Hidrotécnicas, Universidad Tecnológica de Panamá, Panamá.  
E-mail: lucas.calvo@utp.ac.pa

## Introducción

Las ecuaciones de aguas rasas, con aproximación hidrostática de presiones, tienen muchas aplicaciones en la modelación de las ondas largas, tales como mareas y ondas de tormenta. Sin embargo, la falta de dispersión en los modelos de aguas rasas impide su uso en la modelación de la propagación de las olas desde mar adentro hasta la costa.

Stelling y Zijlema (2003) propusieron un modelo de diferencias finitas que toma en cuenta la dispersión a través de un término de presión no-hidrostática. Las ecuaciones integradas en la vertical son análogas a las ecuaciones de aguas rasas con la adición de una ecuación de momentum vertical y un término de presión no-hidrostático en las ecuaciones del momentum horizontal.

En este trabajo, un modelo de elementos finitos Contínuo/Discontínuo de Galerkin no-hidrostático integrado en la vertical para la propagación y rompimiento de olas es desarrollado. El modelo es verificado con una solución analítica y validado usando datos experimentales.

## Metodología

Los modelos no-hidrostáticos para la dinámica de olas son generalmente desarrollados basados en sus predecesores hidrostáticos. Las ecuaciones gobernantes en el modelo hidrodinámico no-hidrostático integrado en la vertical, sin incluir los términos turbulentos y de Coriolis, son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{gU\sqrt{U^2 + V^2}}{HC_h^2} \\ \quad - \frac{1}{2\rho} \frac{\partial q_b}{\partial x} - \frac{q_b}{2\rho H} \frac{\partial}{\partial x} (\xi - h) \end{array} \right. \quad [1]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -g \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{gV\sqrt{U^2 + V^2}}{HC_h^2} \\ \quad - \frac{1}{2\rho} \frac{\partial q_b}{\partial y} - \frac{q_b}{2\rho H} \frac{\partial}{\partial y} (\xi - h) \end{array} \right. \quad [2]$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{q_b}{\rho H} \quad [3]$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial(UH)}{\partial x} + \frac{\partial(VH)}{\partial y} \quad [4]$$

Donde  $U$ ,  $V$  y  $W$  son velocidades promedio en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ ,  $\rho$  es la densidad del agua y  $C_h$  es el coeficiente de Chezy. La profundidad de flujo se define como  $H = \xi + h$ , donde  $\xi$  es el nivel de la superficie del agua medido desde un nivel de referencia fijo y  $h$  es la profundidad medida desde ese mismo nivel. En estas ecuaciones se asume una distribución lineal tanto para las presiones no-hidrostáticas como para las velocidades verticales. La presión no-hidrostática en la superficie libre es tomada como cero y en el fondo como siendo  $q_b$ . La velocidad vertical promedio,  $W$ , es  $(w_\xi + w_b)/2$ , donde  $w_\xi$  es la velocidad vertical en la superficie y  $w_b$  es la velocidad vertical

en el fondo. Con esta aproximación la ecuación del momentum vertical [3] puede escribirse como:

$$w_\xi^{n+1} = w_\xi^n - w_b^{n+1} + w_b^n + \frac{2\Delta t q_b^{n+1}}{\rho H^n} \quad [5]$$

La velocidad vertical en el fondo se estima a partir de la condición de borde cinemática como:

$$w_b^{n+1} = -U^n \frac{\partial h}{\partial x} - V^n \frac{\partial h}{\partial y} \quad [6]$$

El procedimiento de solución comienza resolviendo las ecuaciones de momentum horizontal [1] e [2], sin los términos de presión no-hidrostática, hasta encontrar las soluciones provisionales  $\tilde{U}^{n+1}$  y  $\tilde{V}^{n+1}$ .

La solución de estas ecuaciones es llevada a cabo con el método de los elementos finitos Discontínuo de Galerkin, que permite el modelado del rompimiento de la ola, además de su translación.

Las velocidades horizontales finales, influenciadas por los términos de presión no-hidrostática, pueden ser expresadas como:

$$U^{n+1} = \tilde{U}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2\rho H^n} \left( H^n \frac{\partial q_b^{n+1}}{\partial x} + q_b^{n+1} \frac{\partial}{\partial x} (\xi^n - h) \right) \quad [7]$$

$$V^{n+1} = \tilde{V}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2\rho H^n} \left( H^n \frac{\partial q_b^{n+1}}{\partial y} + q_b^{n+1} \frac{\partial}{\partial y} (\xi^n - h) \right) \quad [8]$$

Para obtener una solución correcta entre el campo de velocidades y las presiones no-hidrostáticas, la ecuación de la continuidad se aplica directamente sobre la columna de agua:

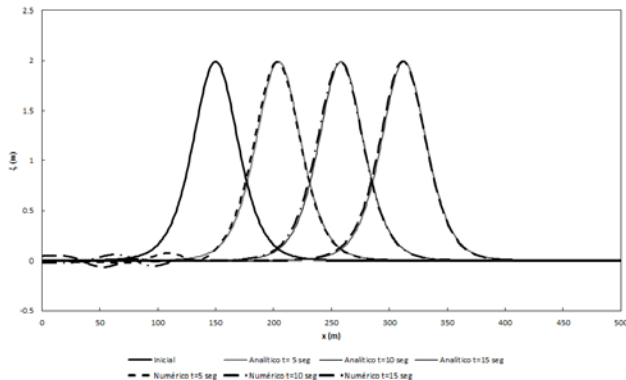
$$\left( \frac{\partial U^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial V^{n+1}}{\partial y} \right) + \left( \frac{w_\xi^{n+1} - w_b^{n+1}}{H^n} \right) = 0 \quad [9]$$

Al substituir las ecuaciones [5]-[8] en la ecuación [9] se llega a una ecuación de Poisson de la cual se obtiene la presión no-hidrostática en el fondo  $q_b^{n+1}$ . La solución de la ecuación de Poisson es conseguida a través del método de elementos finitos Contínuo de Galerkin (Calvo y Rosman, 2017), ya que la ocurrencia de presiones no-hidrostáticas se considera apenas en la región continua del flujo.

Finalmente, las ecuaciones [7] y [8] y la ecuación de la continuidad integrada en la vertical [4] se resuelven de forma acoplada a través del método Discontínuo de Galerkin para llegar a las soluciones finales  $U^{n+1}$ ,  $V^{n+1}$  y  $\xi^{n+1}$ .

## Resultados

El modelo se verificó usando la solución analítica de la propagación de una ola solitaria, sin considerar la fricción y la turbulencia, de 2 m de altura en un canal de 500 m de largo y 10 m de profundidad (Figura 1). La introducción de condiciones de radiación de Sommerfeld en las fronteras abiertas remueve las pequeñas olas refractadas en la solución numérica. El modelo se validó usando datos experimentales de distintas publicaciones, como la propagación de una ola sinusoidal sobre una berma (Beji y Battjes, 1993) y el “run up” de una ola solitaria en una playa plana (Titov y Synolakis, 1995).



**Figura 1.-** Propagación de olas simuladas y solución analítica para diferentes tiempos de simulación.

## Conclusiones

Un modelo de elementos finitos de Galerkin Continuo/Discontinuo no-hidrostático integrado en la vertical para la propagación y el rompimiento del oleaje en zonas costeras fue desarrollado con suceso.

La inclusión del procedimiento Discontinuo en el anterior modelo Continuo de Galerkin (Calvo y Rosman, 2017) posibilita la modelación del rompimiento del oleaje ampliando así su aplicabilidad.

## Referencias bibliográficas

- Beji S., Battjes J.A.** (1993). “Experimental investigation of wave propagation over a bar.”, *Coastal Engineering*, Vol. 19, No. 1, pp. 151-162.
- Calvo L., Rosman P.C.** (2017). “Modelo de Elementos Finitos No-Hidrostático Integrado en la Vertical para la Propagación de Olas.”, *Revista I+D Tecnológico*, Vol. 13, No. 2, pp. 56-66.
- Stelling, G.S., Zijlema M.** (2003). “An accurate and efficient finite-difference algorithm for non-hydrostatic free-surface flow with application to wave propagation.”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 43, No. 1, pp. 1-23.
- Titov V.V., Synolakis C.E.** (1995). “Modeling of breaking and nonbreaking long-wave evolution and run up using VTCS-2.”, *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, Vol. 121, No. 6, pp. 308-316.