

ESTUDIO DE LA DIMENSIÓN FRACTAL EN REDES DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA POTABLE UTILIZANDO CRITERIOS HIDRÁULICOS

¹Kevin Vargas y ²Juan Saldarriaga

¹ Investigador, Centro de investigaciones en Acueductos y Alcantarillados (CIACUA) Universidad de los Andes.

² Profesor Titular, Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental, Universidad de los Andes.

E-mail: ka.vargas2130@uniandes.edu.co, jsaldarr@uniandes.edu.co

Introducción

Los fractales son uno de los aspectos más comunes encontrados en varios sistemas naturales y artificiales que presentan patrones similares a diferentes escalas. Existen diversas definiciones para un fractal, pero tal vez la que mejor se ajusta al caso de este estudio es la de un objeto, arreglo o sistema abstracto que presenta autosimilitud en diferentes escalas. No es necesario que presente exactamente la misma estructura, pero sí el mismo tipo de estructura geométrica en diferentes escalas. La dimensión topológica (D_T) o dimensión "intuitiva" de cualquier objeto, arreglo o sistema fractal siempre es un entero (punto: $D_T = 0$, curva: $D_T = 1$, superficie: $D_T = 2$, etc.) mientras que su dimensión fractal puede ser un número decimal (fraccional). (Mandelbrot, 1982).

En el caso de las redes de distribución de agua potable (RDAP), el concepto de fractalidad se analiza desde una perspectiva menos geométrica. Se considera a una RDAP fractal como aquella en la que sus uniones se conectan de forma similar a diferentes escalas, lo cual en teoría implica un comportamiento similar de las características relacionadas con la hidráulica de la red a diferentes escalas. Esto último sin la necesidad de que su geometría sea similar a diferentes escalas, es decir, una RDAP fractal puede cambiar completamente su geometría y seguir siendo igual de fractal siempre que la conectividad entre sus nudos siga siendo la misma.

La identificación de estas características en tales sistemas permite realizar un análisis a gran escala con muy pocos detalles con un alto nivel de confianza antes de realizar un análisis detallado a una escala más fina. Este proceso provee una forma eficiente y confiable de analizar y manejar información de sistemas grandes. (Diao, Butler, & Ulanicki, 2017).

Algunas aplicaciones interesantes de las propiedades fractales de las RDAPs son el análisis de la criticidad de las tuberías a diferentes escalas y la evaluación de la resiliencia de las RDAPs ante fallas, como lo hicieron Diao, et al. (2017) y Di Nardo, et al. (2017), respectivamente. Otra aplicación de interés podría ser la identificación de sectores hidráulicos para lograr resultados similares a la sectorización de RDAPs mediante el concepto de máxima modularidad (Diao, y otros, 2014)

Metodología

Una red se considera fractal si existe una relación potencial entre el número de grupos o "cajas" (N_B) necesarias para cubrir todas las uniones de la red, y el tamaño de cada caja en términos de uniones (l_B) (Diao, Butler, & Ulanicki, 2017). Es decir, una red es fractal si para todos los l_B posibles se obtienen valores de N_B de tal forma que se cumpla la Ecuación 1.

$$N_B = K_0 l_B^{-d_B} \quad [1]$$

donde K_0 es el número de cajas para un l_B de 1 (es decir, el número total de uniones de la red) y d_B es el factor de escala que especifica qué tanto cambian las características en la red con respecto a la escala a la cual es analizada. Este último se conoce como la dimensión fractal de la red. Si se toma el logaritmo en base 10 a cada lado, la Ecuación 1 se puede escribir como la Ecuación 2.

$$\text{Log}(N_B) = -d_B \text{Log}(l_B) + \text{Log}(K_0) \quad [2]$$

En otras palabras, una red se considera fractal si existe una relación lineal entre $\text{Log}(N_B)$ y $\text{Log}(l_B)$ para todos los posibles l_B . Al realizar el ajuste lineal a los datos obtenidos, si el R^2 es lo suficientemente alto, la red se considera fractal y la dimensión fractal es el valor absoluto de la pendiente de dicho ajuste.

El procedimiento seguido para escoger las cajas para cada tamaño de caja y posteriormente calcular la dimensión fractal, fue el mismo que el procedimiento descrito por Song et al. (2007). Este se resume en el diagrama de flujo de la Figura 1.

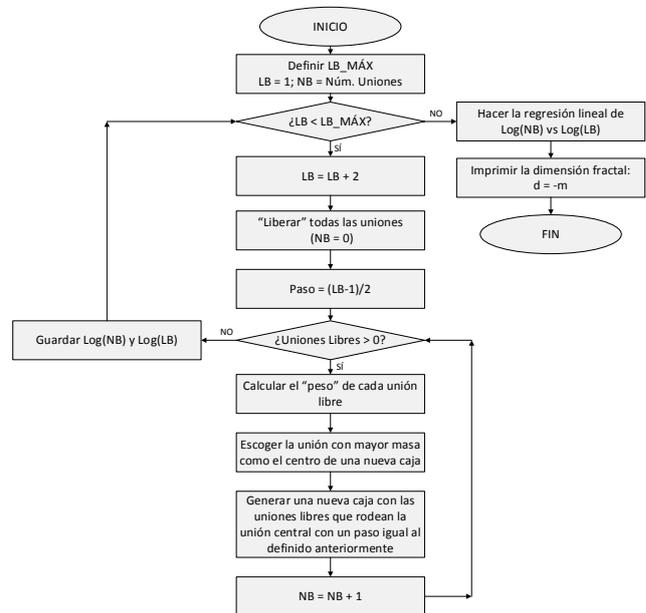


Figura 1.- Diagrama de flujo del algoritmo para el cálculo de la dimensión fractal en redes.

En el método original, para el cálculo del peso de cada unión, se cuentan las uniones que están conectadas a una distancia menor o igual al paso (en términos de uniones) desde el centro que se esté considerando. Esto equivale a asignarle a cada unión un peso individual de una unidad. Para este estudio, con el fin de incluir criterios hidráulicos en el cálculo de la dimensión fractal, se propusieron dos formas alternativas de asignarle el peso individual a cada unión.

El primer criterio (Ecuación 3) consiste en la sumatoria de todos los caudales que le entran a la unión (criterio sumQ).

$$w_i = \sum Q_{ji} \quad [3]$$

El segundo criterio (Ecuación 4) es igual al anterior multiplicado por la altura de la línea de gradiente hidráulico (LGH) en esa unión (criterio LGH*sumQ).

$$w_i = LGH_i * \sum Q_{ji} \quad [4]$$

Al criterio original se le dio el nombre de "criterio topológico" ($w_i = 1$) ya que únicamente tenía en cuenta la topología de la red.

Una vez se calculaban los pesos de cada unión con el criterio seleccionado, el peso total de una unión para decidir cuál iba a ser el centro de la siguiente caja, se calculó de la misma forma descrita en el algoritmo original. El resto del algoritmo se desarrolla sin ninguna modificación. Para todos los casos, si el R^2 del ajuste resultaba mayor o igual a 0.95, la red se consideró fractal.

Se calculó la dimensión fractal de un gran número de redes con cada criterio y se compararon los resultados. Para analizar el efecto del aumento de las demandas, se multiplicaron las demandas base por ciertos factores y se calculó la dimensión fractal incluyendo criterios hidráulicos en estos casos.

Por último, se hizo un análisis del tiempo computacional requerido para ejecutar el método de cálculo de la dimensión fractal con cada criterio con respecto al número de uniones y de tuberías de las redes analizadas.

Resultados

Para el cálculo de la dimensión fractal, se obtuvieron resultados diferentes al cambiar la forma de calcular los pesos de cada nudo. En el caso del criterio topológico, casi siempre se obtuvieron valores de d_B mayores. Esto se debe a que el criterio topológico siempre generaba las cajas desde los centros que estaban rodeados de más uniones. Por otro lado, los otros dos criterios podían o no desviarse hacia los bordes dependiendo de la hidráulica de la RDAP. Es decir, el criterio topológico tiende a minimizar el número de cajas N_B necesario para cada l_B generalmente.

Con respecto a la demanda, no se identificó ninguna tendencia clara. Sin embargo, se pudo observar que la dimensión fractal sí podría cambiar considerablemente en algunos casos si se utilizan criterios hidráulicos como se puede ver en la Figura 2 y la Figura 3.

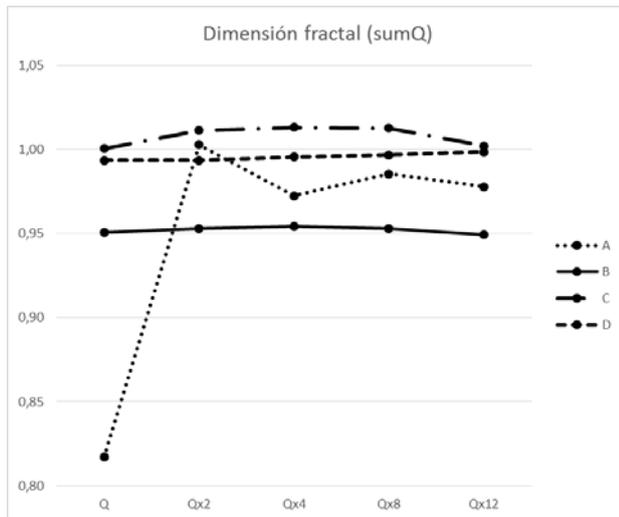


Figura 2.- Dimensión fractal utilizando el criterio sumQ variando la demanda base en los nudos en cuatro redes diferentes.

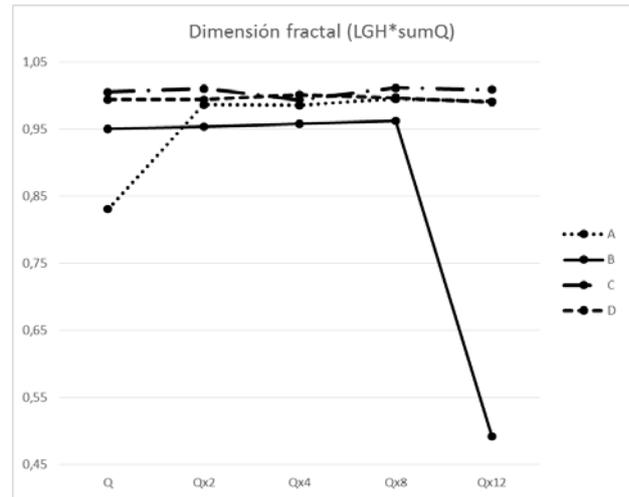


Figura 3.- Dimensión fractal utilizando el criterio LGH*sumQ variando la demanda base en los nudos en cuatro redes diferentes.

Conclusiones

La dimensión fractal de las redes siempre tenderá a ser mayor si se calcula teniendo en cuenta la topología de la RDAP únicamente en comparación con los otros dos métodos de cálculo del peso propuestos en el presente trabajo.

La gran mayoría de redes de distribución de agua potable tienen características fractales de acuerdo con el criterio del R^2 propuesto por Diao et al. (2017).

La dimensión fractal puede o no variar con los cambios de la demanda base, por más que la topología sea exactamente la misma.

El tiempo computacional requerido para el cálculo de la dimensión fractal aumenta de manera exponencial con respecto al número total de tuberías y de nudos de las redes.

Referencias

- Di Nardo, A., Di Natale, M., Giudicianni, C., Greco, R., & Santonastaso, G. F. (2017). Complex network and fractal theory for the assessment of water distribution network resilience to pipe failures. *Water Science & Technology: Water Supply*, 1-11.
- Diao, K., Butler, D., & Ulanicki, B. (2017). Fractality in Water Distribution Networks. *CCWI 2017 - Computing and Control for the Water Industry*.
- Diao, K., Farmani, R., Fu, G., Astaraie-Imani, M., Ward, S., & Butler, D. (2014). Clustering analysis of water distribution systems: identifying critical components and community impacts. *Water Science & Technology*, 1764-1773.
- Mandelbrot, B. B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Co.
- Song C., G. L., Halvin, S., & Makse, H. A. (2007). How to calculate the fractal dimension of a complex network: the box covering algorithm. *J. Stat. Mech.*