

# MODELACIÓN NUMÉRICA DE LA PRECIPITACIÓN AREAL EN CUENCAS NATURALES CON EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS

César A. Lifonzo Salcedo<sup>1</sup> y Miyali E. Lifonzo Yaranga<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga, Ayacucho-Perú.

<sup>2</sup> Advanced Global Engineering Corporation, Lima- Perú.  
E-mail: coamcycesh@gmail.com, miyemly@gmail.com

## Resumen

En este trabajo de investigación se presenta un modelo matemático y computacional para la simulación hidrológica de la precipitación areal basado en el Método de Volúmenes Finitos (MVF). Utilizando funciones de interpolación se hace una representación exacta de la forma y relieve de la cuenca a través de la integración numérica realizada por Cuadratura gaussiana. A cada pluviómetro que se encuentra en la zona de influencia de la cuenca se asignan dos pesos, uno asociado a la precipitación con respecto a un datum y el otro referido a la relación precipitación-altitud. El peso de este último elimina eficazmente cualquier error sistemático debido al sesgo altitudinal de la red. El código numérico se desarrolló en MATLAB y se hace una aplicación práctica a la cuenca del río Cachi, Ayacucho, teniendo en consideración la relación precipitación-altitud, derivada de los datos de las precipitaciones de cada estación administradas por el SENAMHI.

## Introducción

En el Perú las estaciones pluviométricas están situados generalmente en lugares de fácil acceso y alcance para su mantenimiento y operación, y esto significa en valles o zonas bajas. Por lo que existe una deficiencia proporcional de pluviómetros en las zonas más altas. Por lo tanto, las redes de pluviómetros actualmente instalados en todo el país subestiman la verdadera precipitación areal. Además, hoy en día aún se sigue utilizando técnicas tradicionales para estimar la distribución espacial y temporal de la precipitación a partir de los datos históricos. Dado que los recientes avances en las tecnologías de la computación ofrecen mejores posibilidades de modelado hidrológico, que a su vez proporciona la mejor comprensión de los procesos hidrológicos, el Método de Volúmenes Finitos (MVF) es una herramienta numérica eficaz para determinar la precipitación areal.

## 1.1 Objetivos

### 1.1.1 Objetivos generales

Desarrollar un modelo matemático y computacional de análisis y simulación numérica de la precipitación areal en cuencas naturales mediante el Método de Volúmenes Finitos (MVF).

### Objetivos específicos

- Establecer ecuaciones matemáticas de la relación precipitación-altitud y las demás variables mediante el Método de Volúmenes Finitos que permita interpolar la precipitación en la cuenca del río Cachi.
- Analizar y evaluar la variabilidad de la precipitación areal y su comportamiento en la cuenca del río Cachi.
- Desarrollar un código computacional del modelo matemático propuesto en MATLAB para la automatización y simulación numérica de la precipitación areal que contribuya en la planificación y gestión de los recursos hídricos en la cuenca del río Cachi.

## Materiales y métodos

### 2.1 Función Precipitación-Altitud

Si asumimos que la precipitación en un punto  $p(x, y)$  es una función de la altitud del punto entonces podemos escribir

$$p(x, y) = p + \beta_1 z + \beta_2 z^2 \quad [1]$$

Donde  $p$  es la precipitación en  $(x, y)$  con respecto a un datum,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  son los coeficientes desconocidos para cada situación o zona y  $z$  es la altitud con respecto a un datum, generalmente con respecto al nivel del mar.

### 2.2 Solución con el MVF

Utilizando el método de las medianas a partir de mallas generadas por triangulación de Delaunay se une los baricentros de los triángulos con los puntos medios de los lados generando un polígono alrededor de un vértice común de los triángulos adyacentes como se muestra en la Figura 1-(a). Por lo tanto, se construye el volumen finito en el vértice 1, para el cual los triángulos adyacentes que aportan son 123, 134, 145, 156 y 167. El punto  $o$  es baricentro del triángulo 123,  $u$  y  $v$  son los puntos medios del lado 12 y 13 respectivamente, quedando así definido el sub volumen finito o volumen de control  $luov$  como una aportancia del triángulo 123 en el vértice 1.

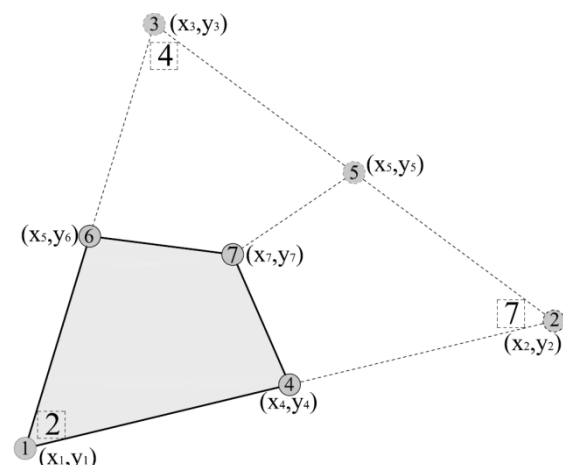


Figura 1.- Coordenadas locales en el elemento triangular.

El volumen de lluvia que cae sobre cada elemento se obtiene integrando la precipitación sobre el área del elemento. Los valores de  $p$  se tienen en las estaciones, es decir vértices de los elementos triangulares. Utilizando la ecuación [1] y haciendo la interpolación geométrica en los puntos medios del triángulo de la Figura 1-(b) se determina las coordenadas de los puntos 4, 5 y 6. Y Consecuentemente se determina el volumen de lluvia en el área conformado por los vértices y estos puntos para cada elemento.

$$v^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} p |J| d\xi d\eta + \beta_1 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} z |J| d\xi d\eta + \beta_2 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} zp |J| d\xi d\eta \quad [2]$$

Donde:

$$p = N_1 p_1 + N_2 p_2 + N_3 p_3 + N_4 p_4 = [N] \{P\} \quad [3]$$

$$z = M_1 z_1 + M_2 z_2 + M_3 z_3 + M_4 z_4 + M_5 z_5 + M_6 z_6 + M_7 z_7 = [M] \{z\} \quad [4]$$

### 2.2.1 Discretización de la cuenca con el MVF

La cuenca es discretizado en un conjunto de volúmenes de control no sobrepuesto, que pueden presentar irregularidad en tamaño y forma. Los valores de la variable dependiente son almacenados en centroide del volumen de control que no son otro lugar que los vértices de los triángulos como se puede en la Figura 2. El proceso de discretización se hace más conveniente por el hecho de que todas las ecuaciones de importancia poseen una forma común, siendo esta la forma general de la precipitación areal.

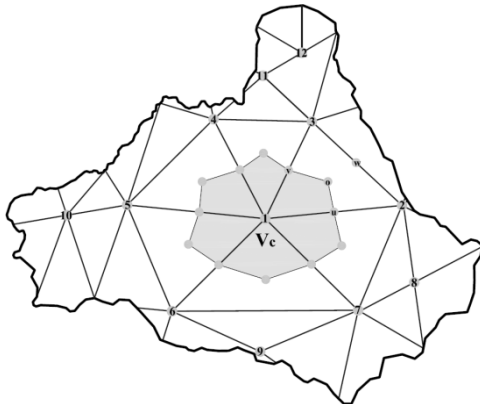


Figura 2.- Coordenadas locales en el elemento triangular.

En este trabajo de investigación se obtiene los volúmenes de control con una malla no-estructurada es a través de la triangulación de Delaunay.

### 2.3 Cuenca Cachi

La cuenca del río Cachi comprende las subcuentas Paccha Intercuenca, Apacheta, Allpachaca, Rupaquesera, Chicllarazo bajo, Choccoro, Chicllarazo bajo y Cachi. Esta cuenca se encuentra en la región Ayacucho Perú.



Figura 2.- Subcuentas del río Cachi.

### Resultados y discusión

El método propuesto toma en cuenta no sólo la variación de la precipitación en el plano horizontal, sino también la variación altitudinal de la distribución de las lluvias. El efecto proporcional que cada indicador tiene varía de tormenta a tormenta o tipo de tormenta, debido a la relación precipitación-altitud que se aplica. Para la cuenca del río Cachi se tiene resultados muy favorables.

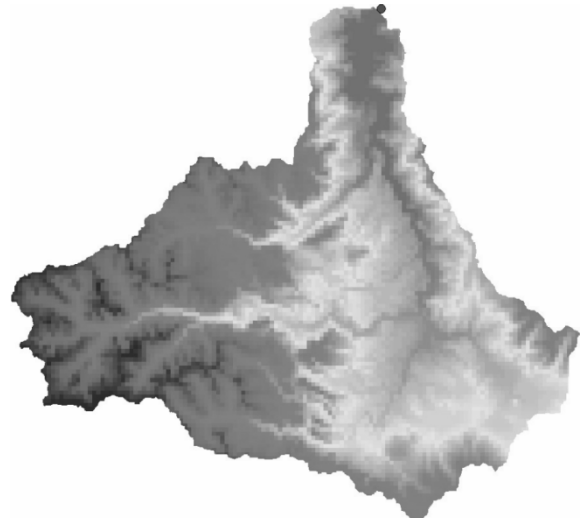


Figura 3.- Interpolación de la precipitación areal en la cuenca del río Cachi.

El Método de Volúmenes Finitos, puede formularse bajo distintas configuraciones de funciones de interpolación y de forma y es de fácil integración numérica y sistematización de las ecuaciones en forma matricial, manipulable para la solución aproximada de las ecuaciones involucradas en la interpolación de la precipitación areal en cuencas naturales.

### Conclusiones y recomendaciones

- La ventaja más importante del método, es que cualquier sesgo altitudinal en la red de pluviómetros se corrige sobre una base de eventos de tormenta, eliminando errores sistemáticos que pueden ser considerables si la cuenca en análisis tiene un área demasiado grande.
- Con el Método de Volúmenes Finitos a diferencia de los métodos tradicionales se puede realizar de manera sencilla la representación de superficies incluso utilizando polinomios de alto orden con varios números de puntos de interpolación dependiendo de la orografía de la cuenca.

### Referencias

- Hutchinson, P. (1968). An analysis of the effect of topography on rainfall in the Taieri catchment area Otago. Earth Sci. J., 2, No. 1, 51-68.
- Ergatoudis, J.G. (1968). Isoparametric finite elements in two and three-dimensional analysis, Ph. D Thesis, University of Wales, Swansea.
- Versteeg, H. K. & Malalasekera, W. (1995), An introduction to computational fluid dynamics – The finite volume method, Longman Scientific & Technical, New York.